

構造物の AR モデルによる高精度振動特性推定法

長崎大学大学院 学生会員○中宮義貴      長崎大学工学部 フェロー 岡林隆敏  
長崎大学工学部 学生会員 川端稔教

1. はじめに

戦後50年間に大量に造られた道路橋が老朽化する時期を迎え、社会的資産である道路橋に対して最適な維持管理を行い、橋梁の余寿命を延長する技術確立すること必要がある。橋梁が老朽化すると、部材の欠落、様々な隙間の発生、亀裂の発生、錆による部材の欠損等により、構造物の剛性低下による振動数の低下や減衰定数の増加が考えられる。従来の研究から、特に構造物の振動数の低下による構造物の剛性低下の判定は困難であるとも言われている。しかし、極めて微細な振動数を検出するシステムを開発することにより、振動数の変化による構造物の老朽化の判定が可能になると考えられる。本研究は橋梁の常時微動から橋梁の微細な振動特性を高精度に推定する、高精度構造同定アルゴリズムを開発することにある。

2. 橋梁常時微動シミュレーション手法

図-1 に示すランガー橋モデルの各節点に互いに独立な白色雑音  $n(t)$  を作用させる。有限要素法でモデル化された各節点の応答は、基本座標と振動モードを用いて、 $y(t) = \Phi q(t)$  と表される。基準座標を状態空間表示すると、運動方程式は次式で与えられる。

$$\dot{x}(t) = [q^T(t) \quad \dot{q}^T(t)]^T \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bn(t) \tag{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[h_i \omega_i] & [\omega_i^2] \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^T \end{bmatrix}, n(t) = [n_1(t) \quad \dots \quad n_k(t)]^T$$

表-1 の諸元にしたランガー橋の固有振動数を1次振動から10次振動まで示したものが表-2 である。8節点にそれぞれ白色雑音を加えて、Runge-Kutta 法により、振動次数を12次まで考慮した場合の常時微動応答モデルを算出する。節点②を着目点とした際の、応答波形を図-2 に示す。またAR(自己回帰)モデルで用いる応答波形の自己相関を図-3 に示す。

3. 構造同定手法

運動方程式を離散表示すると、次式となる。

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}n(k), \quad x(0) = x_0 \tag{3}$$

$$y(k) = \bar{C}x(k)$$

この式に、可観測行列  $L$  を用いて変換すると、ARMA モデルで表示することができる。

$$L = [C^T \quad (CA)^T \quad \dots \quad (CA^{n-1})^T]^T \tag{4}$$

$$y(k) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) = e(t) + \sum_{j=1}^{n-1} b_j (k-j) \tag{5}$$

これを、AR モデルで近似する。

$$y(k) + \sum_{s=1}^n a_s y(k-s) = e(t) \tag{6}$$

AR モデルの特性方程式は、

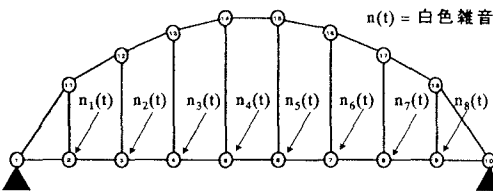


図-1 ランガー橋モデル

表-1 モデルの諸元

| 形式                        | 補剛桁橋                    |
|---------------------------|-------------------------|
| 支間 (m)                    | 58.00                   |
| ライズ (m)                   | 9.36                    |
| 補剛桁の断面積 (m <sup>2</sup> ) | 2.24 × 10 <sup>-2</sup> |
| 拱肋の断面積 (m <sup>2</sup> )  | 2.24 × 10 <sup>-2</sup> |
| 曲げ剛性 (ton・m)              | 1.78 × 10 <sup>3</sup>  |
| 桁全重量 (ton)                | 149.74                  |
| 格間数                       | 9                       |

表-2 固有振動数

|     | 振動数 (Hz) |
|-----|----------|
| 1次  | 1.74     |
| 2次  | 2.56     |
| 3次  | 4.02     |
| 4次  | 6.35     |
| 5次  | 9.73     |
| 6次  | 11.39    |
| 7次  | 13.62    |
| 8次  | 17.61    |
| 9次  | 20.76    |
| 10次 | 22.40    |

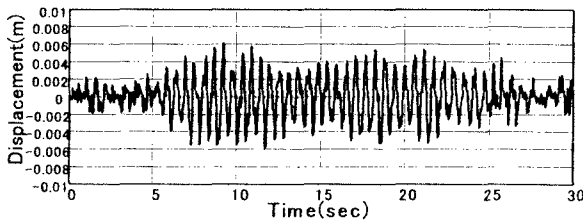


図-2 常時微動モデル波形

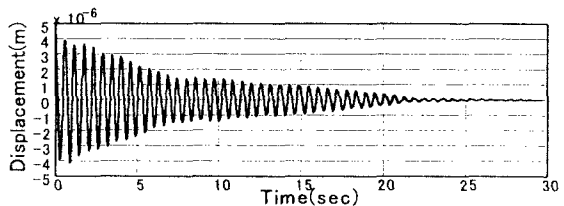


図-3 自己相関波形

$$z^n - \alpha_1 z^{n-1} - \alpha_2 z^{n-2} - \dots - \alpha_n = 0 \tag{7}$$

となり、この方程式の根は、次式で与えられる。

$$Z_k = X_{\text{Re}}^k \pm iX_{\text{Im}}^k \tag{8}$$

この根と振動パラメータの関係は

$$h_k \omega_k = (-1/\Delta) \text{Im} \sqrt{X_{\text{Re}}^2 + X_{\text{Im}}^2}, \quad \omega_k \sqrt{1-h_k^2} = (1/\Delta) \tan^{-1}(X_{\text{Im}}/X_{\text{Re}}) \tag{9}$$

となり、振動数  $\omega_k$  と減衰定数  $h_k$  が推定できる。ここに、 $\Delta$  は測定データのサンプリング時間である。

#### 4. AR モデルによる橋梁自動動特性推定

AR モデルより動特性を抽出するには、はじめにモデル次数  $n$  を決定する必要がある。AR モデルに基づく MEM（最大エントロピー法）によるパワースペクトル密度と、応答波形の FFT との比較により、最適な次数を決める。次数  $n = 30$  の MEM と FFT によるパワースペクトル密度の対数表示を図-4 に示す。スペクトルの一致により、次数  $n = 30$  はモデルに対して妥当であるといえる。次に AR モデルの特性方程式の根を複素平面上で示したものの（回数  $m = 30$ ）が図-5 である。ここで根の絶対値  $r_c$  と角度  $\theta_c$  は、(9)式よりパラメータ  $\Delta$ 、 $h_c$ 、 $\omega_c$  を用いて次式で表せる。

$$r_c = e^{-h_c \omega_c \Delta}, \quad \theta_c = \sqrt{1-h_c^2} \omega_c \Delta \tag{10}$$

パラメータを与え、 $r_c$ 、 $\theta_c$  の範囲にて根を抽出することにより振動数を算出する。 $\Delta = 0.01$ 、 $h_c = 0.1$ 、 $\omega_c = 20$  のパラメータにて抽出した根の振動数の軌跡 ( $m=100$ ) が図-6 である。また、推定振動数の Gauss 分布を図-7 に、理論値との比較を表-3 に示す。これより、8 次までの振動数が高い精度にて推定できていることがわかる。2 次及び 6 次の振動数が現れていないのは着目点が振動モードの節になっているためである。

#### 5. まとめ

本研究が提案する常時微動からの振動数推定法の確立において、最も重要となるのは、モデル次数とパラメータの設定である。対象橋梁により、それぞれ決定する必要がある。決まれば計測器をおくだけでのリアルタイムでの振動数自動推定が可能である。今後は、本手法と遠隔無人計測システムとの結合を計るとともに、様々な橋梁にて本手法を活用したいと考えている。

【参考文献】 1) 中溝高義：信号解析とシステム同定，コロナ社

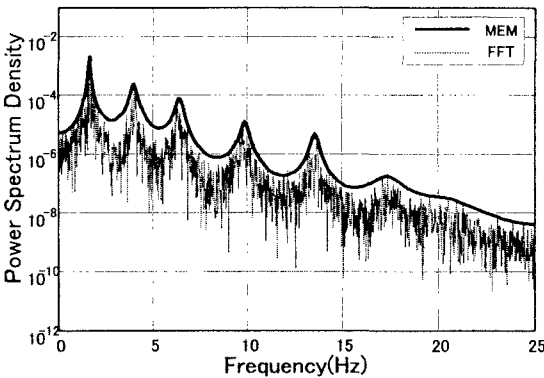


図-4 MEM と FFT パワースペクトル密度

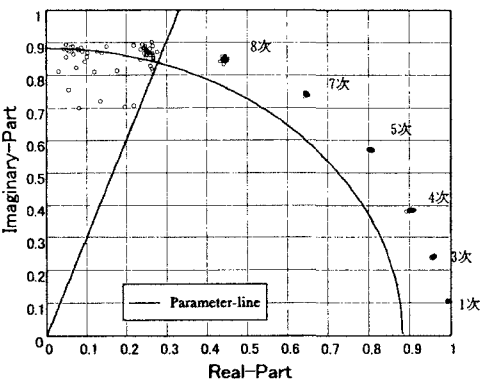


図-5 特性根の分布

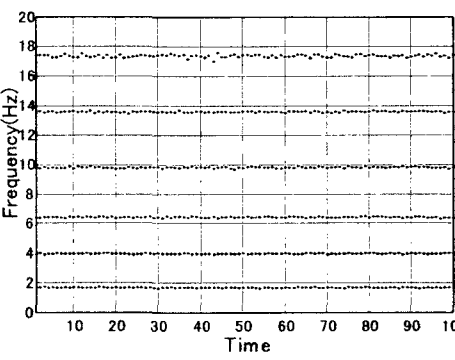


図-6 推定振動数軌跡

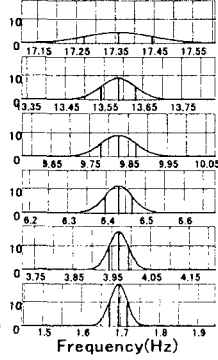


図-7 推定値 Gauss 分布

表-3 理論値と推定値

|           | 1次    | 2次   | 3次    | 4次    | 5次    | 6次    | 7次     | 8次     |
|-----------|-------|------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| 理論値(Hz)   | 1.74  | 2.56 | 4.02  | 6.35  | 9.73  | 11.39 | 13.62  | 17.61  |
| 推定値平均(Hz) | 1.694 | —    | 3.967 | 6.431 | 9.824 | —     | 13.586 | 17.357 |