

確率微分概念に基づく水域での水質予測の試み

神戸大学工学部 フェロー会員 神田 徹
 大分高専 正会員 東野 誠
 大分高専 小坂 貴美子
 大分高専 吉田 みちる

1. はじめに

本研究は、水質変化過程に内在する不確定要素を確率的成分ととらえる立場から、水中の有機物質の減少とそれに伴う溶存酸素(DO)消費過程の解析に確率論的方法を導入して基礎的な検討を行ったものである。水質の変動に対して確率論的考察を加えた研究例は非常に少ない¹⁾。

2. 水中の有機物質減少過程に関する確率論的考察

河川等の水質汚濁に関して水中の有機物質の減少やDO消費過程を解析する場合、従来は決定論的立場からモデル構成が行われている。それによると、溶解性有機物質 L の水中での時間変化は一次反応速度式($dL/dt = -kL$, k : 反応速度定数)で表される。定式化に際しては、一様な流れの中に有機物質を含む汚濁水が排出され、その水流に汚濁物が完全に混合すると仮定されている。また、水中の溶解性有機物質微生物による分解が想定されているが、微生物の増殖等は考慮されていない。

本研究では、水中の有機物質の減少過程は一次反応速度式で表されるような確定的成分に加えて、不確定成分をも含む過程であると考え、次式で表す。

$$\frac{dL}{dt} = (-k + \alpha x_t)L \quad (1)$$

ここに、 $k[1/T]$: 反応速度定数(確定的成分), $x_t[1/T^{1/2}]$: 正規分布に従う独立性確率変量, $\sigma[1/T^{1/2}]$: 定数である。なお、定式化に際して、式(1)中の確率的成分は、微生物分布の不確定性に起因するものと考えている。

式(1)を解くにあたって、以下のように変形する。

$$\frac{dL}{L} = -kdt + \sigma dB_t \quad (2)$$

上式中の B_t はブラウン運動(ウィーナー過程)であり、次式で定義される。

$$B_{t_{j+1}} - B_{t_j} = \sqrt{\delta t_j} W_{t_j} \quad (3)$$

ここに、 $\delta t_j (= t_{j+1} - t_j)$: タイムステップ, W_{t_j} : $N(0, 1)$ に従って変動する白色雑音過程である。なお、式(2)において、形式的に $dB_t/dt = x_t$ とした。

式(2)を解くにあたり、伊藤による確率微分概念²⁾を用いれば、以下の解を得る。

$$L = L_0 \exp\left\{-k - \frac{1}{2}\sigma^2\right\}t + \sigma B_t \quad (4)$$

上式において、 $t=0$ での L を L_0 とした。

3. 確率論的考察に基づくDO消費過程の定式化

前述のように有機物質の指標として従来BODが用いられてきたが、本研究では化学的酸素要求量(COD_{Mn})を用いる。いま、DO濃度 C をCOD_{Mn}の濃度 L と時間 t の関数とする。 L が式(2)に従って変化するとすれば、 L と t の関数である $C(L, t)$ は、伊藤の公式²⁾より、次式で表される。

$$dC = \left\{ \frac{\partial C}{\partial t} - kL \frac{\partial C}{\partial L} + \frac{1}{2}\sigma^2 L^2 \frac{\partial^2 C}{\partial L^2} \right\} dt + \sigma L \frac{\partial C}{\partial L} dB_t \quad (5)$$

ここで、上式(2)に $-L \cdot \partial C / \partial L$ を掛けて式(5)に辺々加えれば次式を得る。

$$dC - \frac{\partial C}{\partial L} dL = \left\{ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 L^2 \frac{\partial^2 C}{\partial L^2} \right\} dt \quad (6)$$

このように、 $dC - \partial C / \partial L \cdot dL$ という量を考えれば、式(5)の右辺第3項の確率的な変動項 dB_t が消去され、 dt 時間における確定的な瞬間的挙動が得られる。すなわち、この dt 時間の間は確率的な変動を考えなくてもよい。そこで、上式(6)の左辺の dC および dL をそれぞれ次式で表す。

$$dL = -kLdt, \quad dC = -rdt \quad (7)$$

上式において、 r は定数である。

式(7)を式(6)に代入して整理すれば、次式を得る。

$$\frac{\partial C}{\partial t} - kL \frac{\partial C}{\partial L} + \frac{1}{2} \sigma^2 L^2 \frac{\partial^2 C}{\partial L^2} + r = 0 \quad (8)$$

境界条件は

$$t=0 \text{ において } C=C_0, \quad t=T \text{ において } C=0 \quad (9)$$

式(8)を式(9)の境界条件の下に解けば、 L が確率的に変動する場合の C の時間変化が次式で表される。

$$C = (C_0 - rT) \cdot \frac{\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta - \sqrt{\pi}/2}{\int_0^{\eta_*} e^{-\eta^2} d\eta - \sqrt{\pi}/2} + r(T-t) \quad (10)$$

ここに、

$$\eta = \frac{\ln L - (k + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{2(T-t)}}, \quad \eta_* = \frac{\ln L_0 - (k + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{2T}} \quad (11)$$

4. 有機物質の減少および DO 消費過程に関する基礎実験

水中の有機物質、および DO 消費の時間的変化特性を調べるために、室内において基礎実験を行った。実験には、大分高専内にある池より採水した水を供試試料とした。この試料を培養瓶(容量 100ml)に分取し、20°Cの恒温槽暗所に静置した。実験開始後、1日ごとにサンプルを取り出し、DO および COD_{Mn}を測定した。なお、試料には硝化を抑制するために ATU を加えた。

COD の経時変化を図-1 に示す。この図より、COD は増減を繰り返しながらも、時間とともに減少していくのが見て取れる。これは、1次反応速度式で表されるような確定的な変化とは異なり、不規則な変動成分を含んでいる。すなわち、COD の変化過程は、時間とともに減少する確定的成分に加えて、確率的成分をも含んでいると解釈される。そこで、まず確定的成分について検討を行う。

COD の減少過程を 1 次反応速度式で表し、式中の反応速度定数 k を実験値から逆推定すれば、 $k=0.01(1/\text{day})$ を得る。こうして得た確定的成分を実験値から差し引けば、図-2 のようである。なお、図-2 の縦軸 $\Delta L/L+k\Delta t$ は、次式によって求めた。

$$\frac{\Delta L}{L} + k\Delta t = \frac{L_{j+1} - L_j}{L_j} + k\Delta t \quad (j=0, 1, 2, \dots) \quad (12)$$

ここに、 $\Delta t=1(\text{day})$ である。

図-2 より、確定的成分除去後の時系列は不規則に変動しており、何らかの持続性の構造は認められない。よって、確定的成分除去後の時系列を白色雑音と見なし、その分散 σ^2 を求めれば、 $\sigma^2=0.0045(1/\text{day})$ を得る。

このようにして得られた k 、 σ^2 を用い、式(4)より COD の時間変化をシミュレートした。図-1 には、得られた計算値の 1 例を実験値と併示してある。

図-1 より、最初の 5 日間は、実験値は 13mg/l 程度の値で推移しており、推定値はこれよりもやや低い値となっている。この点を除けば、モデルは COD の時間変化を良好に表現しているように思われる。

一方、DO に関しては、図-3 のように実験開始後 15 日を過ぎてから急激な濃度の低下が見られるものの、図-1 の COD に比べて時間とともに単調に減少してゆく傾向が強くなり、確定的成分が支配的であると考えられる。また、図-3 には式(10)による推定値が併示してある。この図によると、 σ^2 の値によって推定値に差異が見られる。このようなモデルパラメータの同定等も含めて、モデルをより精巧なものに改良してゆく必要がある。

参考文献

- 1) 横寺 宏, 熊谷博史, 楠田哲也: 水質シミュレーションにおける気象条件の確率論的考察, 平成 10 年度土木学会西部支部研究発表会, 1999.
- 2) 伊藤 清: 確率論, 岩波書店, 1953.

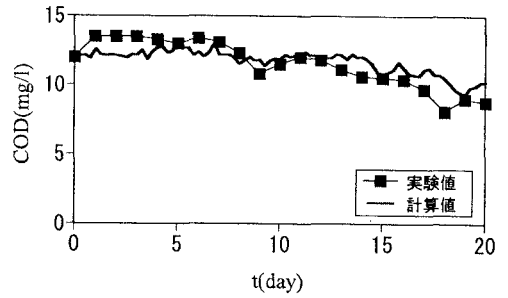


図-1 COD の時間変化

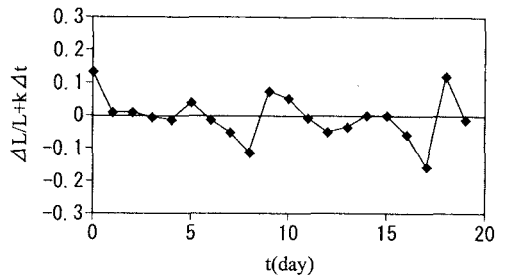


図-2 確定的成分除去後の COD 時系列

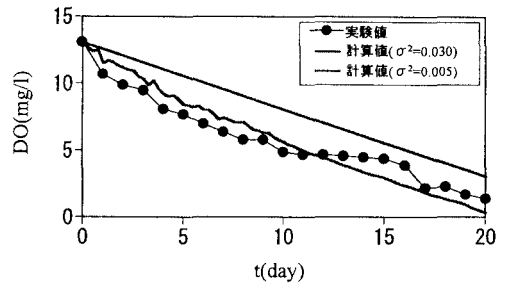


図-3 DO の時間変化