

水平振動を受ける円筒形水槽内容液の非線形振動解析法

正会員 高西照彦

1. まえがき 図-1に示すような円筒形水槽が水平方向の調和振動を受けて、その内容液が非線形振動をするときの振動特性を求めるのに、有限要素法は有力な解析法ではあるが、その場合、その数値計算には非常に多くの記憶容量と長時間に及ぶ計算時間を必要とするという難点がある。Ockendon 等¹⁾は水深が浅く、加振振幅が容器の半径に比べて小さいという条件の下に、内容液の1次の固有振動数近傍における振動特性を考える場合について、摂動法を用いて、長方形貯槽内容液の非線形振動特性を求める方法を示した。本論では、Ockendon 等と同じ考え方に従って、摂動法を用いて円筒形水槽内容液の調和振動による非線形振動特性を求めることができる理論式を導き、数値計算を行って、得られた結果を既存の実験結果²⁾と比較した。

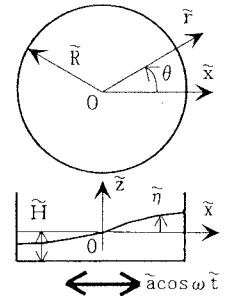


図-1 円筒形水槽及び座標系

2. 基礎方程式 速度ポテンシャルを $\tilde{\varphi}$ とすれば、流体の運動を支配するラプラスの方程式及び圧力方程式は $\tilde{\varphi}_{rr} + \tilde{\varphi}_{\theta\theta}/r^2 + \tilde{\varphi}_{zz} = 0$ (1)

$$\tilde{\varphi}_t + (1/2) \{ (\tilde{\varphi}_r)^2 + (\tilde{\varphi}_\theta/r)^2 + (\tilde{\varphi}_z)^2 \} + g\tilde{z} - r\tilde{a}\omega^2 \cos \omega t + \tilde{p}/\rho = 0 \quad (2)$$

ここに、 ρ は内容液の密度、 $\tilde{p}$ は水圧である。また、下付き添字は微分を表す。境界条件は底面 ($\tilde{z} = -\tilde{H}$) で $\tilde{\varphi}_z = 0$ (3)、壁面 ($\tilde{r} = \tilde{R}$) で $\tilde{\varphi}_r = 0$ (4)。自由表面における運動学的条件は波高を $\tilde{\eta}$ とすれば $\tilde{z} = \tilde{\eta}$ において $\tilde{\varphi}_z = \tilde{\eta}_t + \tilde{\varphi}_r \tilde{\eta}_r + \tilde{\varphi}_\theta \tilde{\eta}_\theta / r^2$ (5)。力学的条件は式(2)において $\tilde{p} = 0$ 及び $\tilde{z} = \tilde{\eta}$ とおいた式によって得られる (式(6))。

3. 基礎方程式の無次元化と摂動解 式(1)~(6)において、以下に示すような無次元化を行う。

$t = \omega \tilde{t}$, $\tilde{R} = \mu_{11} R$, $\tilde{H} = HR$, $\tilde{r} = rR$ 。ここに、 μ_{11} は $J_1'(\mu_{11}) = 0$ を満たす最小の定数で、 $\mu_{11} = 1.8411 \dots$ である。また、摂動項としては、 $\tilde{a}/R$ を小さいとして $\varepsilon = \tilde{a}/R$ を採用し、これを用いて $\tilde{\varphi}, \tilde{\eta}$ を無次元化して

$\tilde{\varphi} = R\tilde{a}\omega\varepsilon^{-1/2}\bar{\varphi}$, $\tilde{\eta} = \tilde{a}\varepsilon^{-1/4}\bar{\eta}$, $\tilde{z} = \varepsilon^{1/4}R\bar{z}$ と表す。さらに、摂動解を得るために $\bar{\varphi}, \bar{\eta}$ を次式に示す様に摂動項 ε を用いて展開する。

$$\bar{\varphi} = \varphi_0 + \varepsilon^{1/2}\varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 + \dots \quad (7), \quad \bar{\eta} = \eta_0 + \varepsilon^{1/2}\eta_1 + \varepsilon\eta_2 + \dots \quad (8)$$

式(7),(8)を式(1)~(6)に代入し、 $\varepsilon^{1/2}$ までの項を採用して摂動法を適用すると、以下に示すような非線形微分方程式が得られる。 A 及び C を r, θ, t の関数 $A = A(r, \theta, t)$, $C = C(r, \theta, t)$ として、

$$\varphi_0 = A \quad (9), \quad \eta_0 = -\kappa A_t \quad (10), \quad \varphi_1 = -(\bar{z} + \kappa)^2 A_{tt} / 2 + C \quad (11)$$

$$\eta_1 = -\kappa \{ (\lambda - \kappa^2/3) A_t - \kappa^2 A_{tt} / 2 + C_t + A_r^2 / 2 + A_\theta^2 / 2r^2 - r \cos \theta \cos t \} \quad (12)$$

$$A, C \text{ の満足すべき微分方程式は } A_{rr} + A_r/r + A_{\theta\theta}/r^2 = A_{tt} \quad (13)$$

$$C_{rr} + C_r/r + C_{\theta\theta}/r^2 - C_{tt} = (\lambda - \kappa^2/3) A_{tt} - \kappa^2 A_{ttt} / 3 + A_t A_{tt} + 2A_r A_{rt} + A_\theta A_{\theta t} / r^2 + r \cos \theta \sin t \quad (14)$$

境界条件は $A_r(\mu_{11}, \theta, t) = 0$, $A_{tt}(\mu_{11}, \theta, t) = 0$, $C_r(\mu_{11}, \theta, t) = 0$ 。

ここに、 $\kappa = H\varepsilon^{-1/4}$, $\lambda = \{ (\omega/n_{11})^2 - 1 \} \varepsilon^{-1/2}$ 。 n_{11} は内容液の1次 (半径方向1次、円周方向1次) の固有円振動数である。

4. 非線形微分方程式の解 式(13),(14)の解を次の様に仮定する。

$$A = \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M J_n(\Omega_{nm} r) T_{nm}(t) \cos n\theta \quad (15), \quad C = \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M J_n(\Omega_{nm} r) \bar{T}_{nm}(t) \cos n\theta \quad (16)$$

いま、 $J'_n(\varepsilon_{nm})=0$ を満たす根を ε_{nm} とすれば、 $\Omega_{nm}=\varepsilon_{nm}/\mu_{11}$ である。なお、 $J'_n(\)$ は第 1 種 n 次のベッセル関数であり、 $T_{nm}(t), \bar{T}_{nm}(t)$ は時間の関数である。さて、式(15),(16)を式(13),(14)に代入すれば、 θ に関する調和関数、 r に関するベッセル関数によって展開された恒等式が得られる。ここで、この恒等式が成立する様に θ 及び r に関する各項の係数を定めれば、 $T_{nm}(t), \bar{T}_{nm}(t)$ に関する微分方程式が得られる。 $T_{nm}(t), \bar{T}_{nm}(t)$ を、それぞれその係数を未知数とするフーリエ級数で表した後、この微分方程式に代入し、 t に関する調和関数の各項の係数を比較することによって、上記の未定係数に関する非線形の連立代数方程式が得られる。繰返し計算によってこの連立方程式を解けば、これらの未定係数の値を定める事が出来る。これによって式(15),(16)の A 及び C が確定する。この A 及び C を用いれば、式(7)~(12)から貯槽内容液の速度ポテンシャル $\tilde{\phi}$ 及び波高 $\tilde{\eta}$ が求められることになる。全壁面動水圧 $\tilde{P}$ は次式によって算出することが出来る。

$$\tilde{P}/(-\rho \pi R^2 \tilde{H} \tilde{\alpha} \omega^2) = (\varepsilon^{-1/2}/\mu_{11}) \left[\sum_{m=1}^M \Omega_{1m} J_1(\Omega_{1m} \mu_{11}) T'_{1m}(\Omega_{1m} t) - \varepsilon^{1/2} \mu_{11} \cos t \right] \quad (17)$$

ここに、 $'$ は微分を表す。なお、上式は式(15),(16)において $N=1$ とした場合を示したものである。

5. 数値計算結果及び考察 数値計算に用いた円筒形貯槽及び内容液に関する諸元、諸定数は次の通りである。貯槽の半径は 24 cm、内容液は水であり、水深は 4 cm とした。したがって、1 次の固有円振動数は $n_{11}=4.73 \text{ s}^{-1}$ となる。式(15),(16)における N, M としては $N=1, M=2$ を採用した。減衰定数は $h_w=0.015$ とした。調和波による加振は加速度振幅一定として $\tilde{\alpha} \omega^2=0.8, 1.6, 2.5, 3.5 \text{ cm/s}^2$ の 4 段階に変えた場合に

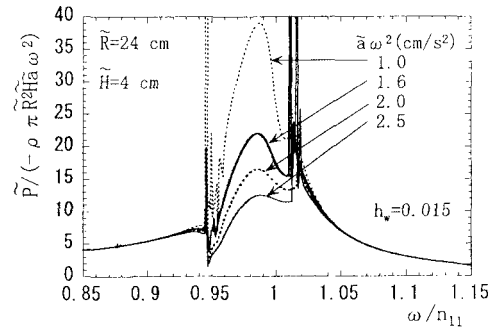


図 - 2 全動水圧の応答曲線

ついて、内容液の水平方向の全壁面動水圧に対する共振曲線及び加振方向に対する壁面波高の時刻歴応答を算出した。結果を図-2 及び図-3 に示した。図-2 は全壁面動水圧の共振曲線を示したもので、横軸に 1

次の固有円振動数で無次元化した振動数を取り、縦軸の動水圧の値は内容液の慣性力を用いて無次元化している。同図を若原氏による実験結果²⁾と比較すると、(a) 加振加速度が大きくなると ω/n_{11} の値が 1 の前後においてそれぞれピークを有し、さらに加振加速度が大きくなるほど右のピークはより振動数の大きい方に移行するという傾向についてはよく合っているが、動水圧の絶対値に関しては一般に計算値の方が少し大きくなっている。

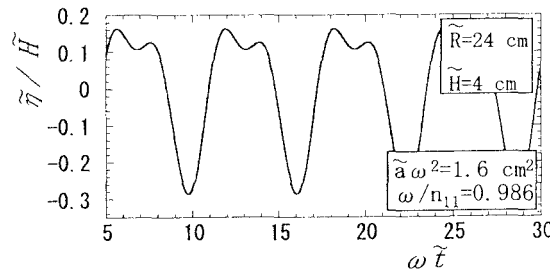


図 - 3 壁面波高の時刻歴応答曲線

(b) 計算では $\omega/n_{11}=0.95$ 付近に不安定領域が存在するが、実験にはそれが表れていないようである。(c) 図-3 は $\tilde{\alpha} \omega^2=1.6 \text{ cm/s}^2$ の場合について、壁面波高の時刻歴応答曲線を示したもので、横軸には $\omega \tilde{t}$ で無次元化した時刻を取り、縦軸の波高は水深で無次元化している。これを実験値と比較すると、絶対値は多少異なるものの、時間に関する波高の変化の傾向はよく合っているといえる。

1) H.Ockendon et al: Resonant sloshing in shallow water, J.Fluid Mech.,vol.167,1986.

2) 若原敏裕: 同調液体ダンパーを用いた構造物の風応答制御に関する研究、学位論文。1996.10.