定常時における緩勾配方程式の振幅関数の数値計算式

九州大学大学院（社会人学生）　　正会員　中村　修

1．はじめに

緩勾配方程式[1]の適用範囲拡大に資するため、すでに我々は、同方程式により記述される波が定まった角周波数を持つ場合の位相関数を具体的に求めた[4]。今回は、その続きとして、同方程式の振幅関数の数値計算式を述べる。緩勾配方程式は、係数が解の角周波数の関数という意味で準線形方程式であるが、上の場合には線形化されている。我々の計算式は、線型性に依存し、エネルギー平衡方程式[3]の数値計算式を参考とした。なお、振幅関数の数値計算では、格子間隔が、普通の波の解を求める場合より大きく取れる事が期待される。

2．輸送方程式と振幅関数の数値計算式

本稿の緩勾配方程式と分散関係式は次の通りとする。

$$\partial^2 u / \partial t^2 - \nabla \cdot (cc_g(x,y)\nabla u) + \sigma^2 (1-n)u = 0,\quad c = \sigma / k = (g / k \tanh kh)^{1/2},\quad n = c_g / c. \qquad (1)$$

ここに、u: 水面変動η(文献[2])または、水表面の速度ポテンシャル, c ：波速, c_g ：群速度, σ ：角周波,

h ：水深, k ：波数　などである。 定まった角周波数を対象とする緩勾配方程式では、成分波の角周波数が自己変調することはない。なお、$v(x,y,\sigma)^2 = cc_g$ ， $x \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (x, y)$，等とする。式(1)を変形して

$$P(u) = \partial^2 u / \partial t^2 - v^2(x_1, x_2, \sigma)\nabla^2 u - b_1 \cdot \partial u / \partial x_1 - b_2 \cdot \partial u / \partial x_2 + d(x_1, x_2, \sigma)u = 0, \qquad (2)$$

と書くことができる。式(2)は、線形変数係数双曲型方程式と見なせる。よって、式 (3) が、仮定できる。

$$u(t,x,\sigma) = A(t,x,\sigma)\cdot e^{-i\phi_1(t,x,\sigma)} + B(t,x,\sigma)\cdot e^{-i\phi_2(t,x,\sigma)} + (\text{Regularizing}), \qquad (3)$$

ここに、$A(t,x,\sigma)$, $B(t,x,\sigma)$は振幅関数であり、$\phi_1(t,x,\sigma)$等は位相関数である。なお、次式が成り立つ[4]。

$$\nabla\phi_1 = (\partial/\partial t, \partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)\phi_1 = (-\sigma, k\cos\theta, k\sin\theta) \qquad (4)$$

但し, $k \approx \sigma / v$, θ ：波向線とx_1軸のなす角（ﾊﾟﾗﾒﾀｰ）とする。(3)式の右辺第一項が進行波を表すものとする。以後、我々は、進行波に関する事項のみを述べる。これより、進行波に関する式（2）の輸送方程式[5],[6]を作成する。 振幅関数$A(t,x,\sigma)$は、σの負の冪の漸近級数として、展開できるものと仮定する[5][6]。即ち、

$$A(t,x,\sigma) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t,x,\sigma),\qquad a_j(t,x,\mu\sigma) = \mu^{-j} a_j(t,x,\sigma)\ \ (=(1/i\sigma)^j a_j') \qquad (5)$$

いま、$P(u) = P(A(t,x,\sigma)\cdot e^{-i\phi_1(t,x,\sigma)}) = 0$, とし左から$e^{i\phi_1(t,x,\sigma)}$を掛けたのち式(5)を代入し、$\sigma$に関する同次項を集めると輸送方程式が得られる。この結果を整理すると、次の様になる。

$$\partial\phi_1 / \partial t + v(x)\left|grad\phi_1\right| = 0, \qquad (6)$$

$$\partial a_0 / \partial t + v(x)\cos\theta(x)\partial a_0 / \partial x_1 + v(x)\sin\theta(x)\partial a_0 / \partial x_2 + \gamma_1 \cdot a_0 = 0, \qquad (7)$$

$$\partial a_j / \partial t + v(x)\cos\theta(x)\partial a_j / \partial x_1 + v(x)\sin\theta(x)\partial a_j / \partial x_2 + \gamma_1 \cdot a_j$$
$$- i/2\sigma \cdot \left(\partial^2/\partial t^2 + v^2(x)\Delta - grad\ v^2(x)\cdot grad + d(x,\sigma)\right) a_{j-1} = 0,\quad j = 1,2,3,\cdots \qquad (8)$$

但し、$\gamma_1 = -1/2\sigma \cdot \left(\partial^2\phi_1 / \partial t^2 - v^2 \Delta\phi_1 - grad\ v^2 \cdot grad\ \phi_1\right)$，である。

普通、例えば文献[6]等では、式（5）の級数が収束するためには、σ が充分に大きい事が前提とされている様に思われる。一方、我々が検討の対象とする緩勾配方程式の角周波数 σ は、1.0 より小さいことも多い。その場合でも、式（5）の型の級数は有効か、或いは収束するかが此処では最大の問題である。今まで述べてきたのは、緩勾配方程式の初期値問題に関係した事項であるが、以後は、簡単のため輸送方程式を離散化近似した場合の初期値 - 境界値問題を考察する。さらに、境界条件が与えられたとき、対象領域は、境界より入射する波の波向線で覆われているものとし、高次輸送方程式の入力境界値は0と仮定する。また、簡単のため、定常波のみについて考察する。輸送方程式(7)、(8)の時間微分の項を落とし、離散化近似式を書くと次の様になる。

$$[B_1]a_0 = F_1, \quad [B_1]a_j = i \cdot [B_2]a_{j-1}, j = 1,2,3,\cdots \quad , \ a_j = (a_{j,1}, a_{j,2}, \cdots, a_{j,N}) . \tag{9}$$

$[B_1]$ の逆行列があると仮定すれば、$a_j = i \cdot [B_1]^{-1}[B_2]a_{j-1} = i \cdot [D]a_{j-1}$ となる。これをみると数列 $\{a_j\}$ が数値的に収束するか否かは、行列 $[D]$ の最大個有値の絶対値の大小による。ところが、Borel 総和法[7] によれば、発散級数のBorel和と称する有界な関数が求まり、且つその関数が、発散級数が充たすべき方程式を充たすことがある。この時、Borel 和は解とみなせる[8]。a_0 を $[D]$ の固有ベクトルの直和で表し、上式に代入すれば、級数は各固有ベクトル毎に、固有値の冪級数となりBorel和が求まる。このBorel和は、次式をみたす。

$$[B_1]A - i[B_2]A = F_1 \tag{10}$$

従って、我々が振幅関数の数値計算に使用する式としては、差し当たり次の二種が考えられる。

① 式(10)に摂動項を加えた次式：$[M]dA/d\ t + [B_1]A_1 - i([B_2]A) = F_1$ (11)

② 既述の輸送方程式を忠実に離散化した式（適当なｊ項で打ち切る．）

①の式は、多少の難点も予想されるが、有力な方法であろう。②の方法は、収束が保証されていない。

現在これらの方法に就いてテスト計算中である。

参考文献

1）磯部　雅彦：波浪変形解析のための波動方程式の比較研究，土木学会論文集　Ｎｏ.491，1994.
2）灘岡　和夫，他：新たな波動モデルによる強分散性非線形場の解析法の確立と室内実験による検証，海岸工学論文集，第４１巻，1994.
3）土木学会海岸工学委員会：海岸波動，土木学会，平成６年.
4）中村　　修：緩勾配方程式と位相関数について，平成９年度土木学会西部支部研究発表会講演概要集（その１），pp,306−307，1997.
5）藤原 大輔：線型偏微分方程式論における漸近的方法Ⅱ，岩波講座 基礎数学，1977.
6）井川　満：偏微分方程式 2，岩波講座，1997.
7）森口,他　：数学公式Ⅱ，岩波全書，1957.
8）竹井　義次：数学セミナー　，vol.37　no,5，pp.26-30，1998.