

気液界面でのガス輸送と乱れ特性の関係

九州大学 総理工 学 ○高崎敦彦 正 杉原裕司
九州大学 総理工 正 松永信博

1. はじめに

気液界面でのガス輸送過程を説明する理論の一つに、Danckwerts¹⁾の表面更新説がある。これは、Higbie²⁾の浸透理論に基づいて、界面のエレメントがランダムに更新される過程をモデル化した理論である。本研究では、Higbieの理論の代わりに、界面の表面伸縮によるガス吸収の効果を考慮した浸透理論を用いて、表面更新モデルの拡張を試みた。さらに、得られたガス輸送係数の数値モデルを振動格子乱流場の再曝気実験に適用し、その有効性について検討した。

2. 理論

単位接触面積の気液界面において、低濃度の流体が非定常的に界面を更新しガス吸収を行っている微小なエレメントを考える。発生から時間 τ 経過したエレメントが存在する年令分布関数を $\phi(\tau)$ とする。いま、エレメントの年令 τ が $0 \sim \infty$ の範囲に分布し、場が統計的に定常状態であるとする。その場合、平均的なガスフラックス F は、年令 τ のエレメントのフラックス F_e を用いて、次式のように表される。

$$F = \int_0^{\infty} F_e \cdot \phi \, d\tau \quad (1)$$

Danckwertsは、 F_e として最も簡単なHigbieの式を採用している。本研究では、このフラックスの定式化において、栗谷・安部³⁾が提唱した界面の伸縮速度を含む、拡張された浸透理論式を用いることとする。

次に、界面伸縮によるガス吸収を考慮した浸透理論式を導出する。界面を原点とし、鉛直下向きに z 軸をとる。界面の近傍の液膜内においては水平方向の流速勾配が一定と見なせるものと仮定する。よって連続の式より、

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \alpha \text{ (const.)} \quad (2)$$

となる。 $z = 0$ で $w = 0$ を考慮すれば、鉛直流速 w は次式のように表される。

$$w = -\alpha z \quad (3)$$

ここで、 α は界面の伸縮速度³⁾であり、正の定数として定義されている。溶存ガスの拡散方程式は、界面伸縮の効果を最低次で取り込んだ次式を考える。

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \alpha z \frac{\partial C}{\partial z} = D_m \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (4)$$

ここで、 D_m は溶存ガスの分子拡散係数である。 $\alpha = 0$ のとき、(4)式はHigbieの扱った式に一致する。また、栗谷・安部は(4)式の定常問題を対象とした解析を行っている。いま、界面から離れたbulk領域のガス濃度を C_∞

とし、界面での飽和濃度を C_s で表せば、(4)式を解く上での初期条件および境界条件は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} I.C. \quad C &= C_\infty \quad \text{at } t=0 \\ B.C. \quad C &= C_s \quad \text{at } z=0 \\ C &\rightarrow C_\infty \quad \text{as } z \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

これらの条件のもとで、(4)式の解は次のようになる。

$$\frac{C - C_\infty}{C_s - C_\infty} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\zeta^2} d\zeta \quad (6)$$

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{\frac{2D_m}{\alpha} \sqrt{1 - e^{-2\alpha\tau}}}} \quad (7)$$

ただし、(6)、(7)式は $\alpha > 0$ の領域、すなわち界面近傍で $w < 0$ の領域（上昇流域）に対する解であることに注意が必要である。本解析では、栗谷・安部の場合と同様にガス吸収が $\alpha > 0$ の領域で集中的に起こっているものと仮定する。以上より、 $t=0$ において、フレッシュなエレメントが界面に出現したとみなせば、年令 τ のエレメントのガスフラックスの理論式は次のようになる。

$$\begin{aligned} F_e &= -D_m \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=0} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{D_m \alpha} (C_s - C_\infty) \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2\alpha\tau}}} \end{aligned} \quad (8)$$

(8)式は $\alpha\tau \rightarrow \infty$ の時、次のような栗谷・安部の式と一致し、 $\alpha\tau \ll 1$ の時、Higbieの式に一致する。

$$F_e = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{D_m \alpha} (C_s - C_\infty) \quad (\text{栗谷・安部}) \quad (9)$$

$$F_e = \sqrt{\frac{D_m}{\pi \tau}} (C_s - C_\infty) \quad (\text{Higbie}) \quad (10)$$

年令分布関数 $\phi(\tau)$ は、表面更新説の標準理論にならって、次式のように与える。

$$\phi(\tau) = \frac{S}{2} e^{-S\tau} \quad (11)$$

ここで、 S は単位接触面積のうち単位時間当たりに更新される面積を表す表面更新率である。ただし、(11)式には標準理論と異なり $1/2$ の係数がついていることに注意が必要である。これは、本研究では $\alpha > 0$ の領域においてのみガス吸収が行われていると仮定しており、その領域が単位接触面積の半分（ $=1/2$ ）であると考えられるために掛けられた係数である。よって、 $\phi(\tau)$ を $\tau=0 \sim \infty$ で積分すれば、当然 $1/2$ となる。

(1)、(8)、(11)式から次式の平均フラックスが得られる。

$$F = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{D_m \alpha} (C_s - C_\infty) \frac{\mu}{2} B \left(\mu, \frac{1}{2} \right) \quad (12)$$

ここで、 μ は $\mu = S / 2\alpha$ で定義されており、表面更新率と界面伸縮速度の比を表す。 $B(\mu, 1/2)$ はベータ関数であり、ガンマ関数を用いて表すことができる。

$$B\left(\mu, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{\mu-1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{\Gamma(\mu) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \quad (13)$$

以上より、本理論におけるガス輸送係数 k_L は次式のように与えられる。

$$k_L = \kappa(\mu) \sqrt{D_m} \alpha \quad (14)$$

ここで、 $\kappa(\mu)$ は μ をパラメータとする係数であり、次のように定義される。

$$\kappa(\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mu}{2} B\left(\mu, \frac{1}{2}\right) \quad (15)$$

この係数の値は、 $\mu = 0.1 \sim 4$ の範囲において $0.5 \sim 1.5$ 程度に変化する。従って、 α と S のオーダーが同程度のとき、 $\kappa(\mu)$ の値は 1 のオーダーとなる。また、 α と S がどちらも界面近くの乱れに規定される場合、 μ は広範囲の実験条件において一定とみなせるであろう。

応力方程式モデルの第一近似として、界面近傍の乱流拡散係数 D_{urb} が次式で表せるものとする。

$$D_{urb} = C_\theta \frac{k_s}{\varepsilon_s} \frac{w'^2}{w'^2} \equiv C_\theta \frac{k_s}{\varepsilon_s} \alpha^2 z^2 \quad (16)$$

ここで、 $w' \equiv \alpha z$ の関係を用いている。 C_θ はモデル定数 (≈ 0.35)、 k_s および ε_s はそれぞれ界面近傍における乱れエネルギーとエネルギー散逸率である。濃度境界層は極めて薄いので、その層内では k_s および ε_s は鉛直方向に一定であると仮定する。

濃度境界層内における、分子拡散と乱流拡散によるトータルガスフラックスは鉛直方向に一定である。 $z = 0$ では分子拡散が支配的であるが、濃度境界層の深さ $z = \delta$ 程度では乱流拡散が支配的であろう。そこで、 $z = \delta / 2$ において $D_m = D_{urb}$ であると仮定すると、境界層厚さ δ は (16) 式より次式のように表せる。

$$\delta = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{D_m}{C_\theta} \frac{\varepsilon_s}{k_s}} \quad (17)$$

今、界面でのガス輸送係数に対して境界モデルが適用できるとする。その場合、 k_L は次式のように表される。

$$k_L = \frac{D_m}{\delta} \quad (18)$$

従って、(14)、(17)、(18) 式から、 α は次式で表せる。

$$\alpha = \frac{4}{C_\theta} \kappa^2(\mu) \frac{\varepsilon_s}{k_s} \quad (19)$$

以上より、(14)、(19) 式から、規格化されたガス輸送係数 k_L の算定式は次式のようになる。

$$\frac{k_L}{k_s^{1/2} \cdot S_c^{-1/2}} = \frac{2 \kappa^2(\mu)}{\sqrt{C_\theta}} R_{ts}^{-1/2} \quad (20)$$

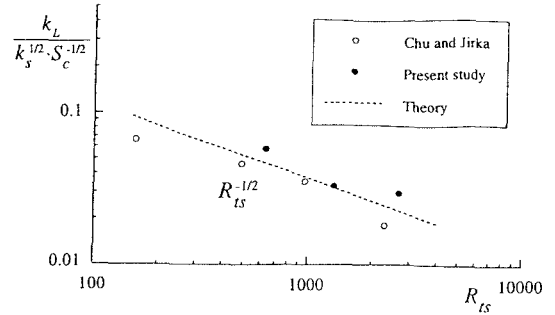


図-1 k_L と R_{ts} の関係

$$R_{ts} = \frac{k_s^2}{\nu \varepsilon_s} \quad (21)$$

ここで、 S_c はシュミット数 ($\equiv \nu / D_m$)、 ν は流体の動粘性係数、 R_{ts} は k_s 、 ε_s で定義される乱流 Reynolds 数である。(20) 式より、界面近傍の乱れ特性により規格化された k_L は R_{ts} の $-1/2$ 乗に比例することがわかる。

3. 理論式の検証

理論式の検証のために、溶存酸素を対象とした振動格子乱流場の再曝気実験を行った。実験では、水深を一定に固定し、格子の振動数および振動幅を変化させて3つのケースについて k_L を算定した。 R_{ts} を評価するためには k_s 、 ε_s の値が必要であるが、これらの算定については Matsunaga et al.⁴⁾ の振動格子乱流場の乱れ特性に関する半理論式を用いた。

(20) 式の関係を検証するために、規格化した k_L を R_{ts} に対してプロットしたものを図-1に示す。ここでは、比較のために Chu and Jirka⁵⁾ の実験値もあわせてプロットしている。この図より、実験値は(20)式関係を良く満たしており、本理論が妥当であることを示唆している。図中の理論式は、実験値に最も適合するように描かれており、その場合の $\kappa(\mu)$ の値はモデル定数値を考慮することにより、0.59と見積もられる。この値は、先の理論的考察から予測される値に比較的近いものになっている。

参考文献

- 1) Danckwerts, P. V. : *Ind. Eng. Chem.*, 43, 1460, 1951.
- 2) Higbie, R. : *Trans. Am. Inst. Chem. Engrs.*, 31, 365, 1935.
- 3) 栗谷・安部 : 第26回年次講演会概要集Ⅱ, 491, 1971.
- 4) Matsunaga et al. : *Fluid Dyn. Res.*, 25(3), 147, 1999.
- 5) Chu, C. R. and Jirka, G. H. : *Int. J. Heat Mass Transfer*, 35, 1957, 1992.