

薄肉偏平殻の多自由度系としての非線形振動の解析

長崎大学大学院 学生会員

○三堂 聡

長崎大学工学部 フェロー会員 高橋 和雄

長崎大学工学部 正会員

中村 聖三

長崎大学工学部 学生会員 田中 利志

1. まえがき

薄肉殻構造のような曲率構造は、剛性が高まり構造上有利である。しかし、飛び移り座屈を含めた不安定現象が生じやすく、動的荷重が作用する場合の非線形振動特性に敏感に影響を及ぼすことが知られている。板厚程度のライズを持つ薄板の非線形振動¹⁾では振幅の大きさによってライズの影響が強く現れることが分かっているが、本研究ではさらに曲率が大きい領域まで取り扱い可能な薄肉殻構造物の非線形振動解析を行う。殻は連続体であるため、本研究では、薄肉偏平殻の1自由度系としての解析²⁾を進展させて、多自由度系として取り扱う。

2. 解法

図-1のような、 x 方向、 y 方向に回転半径 R_x 、 R_y を持つ浅い殻²⁾を図-1に示し、中央表面を次式(1)で表す。

$$z = \frac{1}{2} \left\{ \frac{x(x-a)}{R_x} + \frac{y(y-b)}{R_y} \right\} \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b) \quad (1)$$

ここに、 R_x 、 R_y : 回転半径。

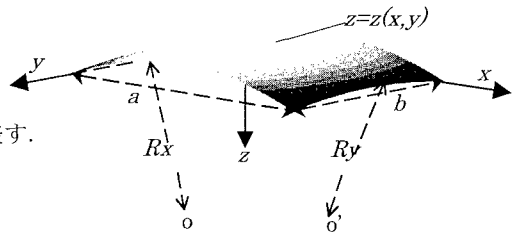


図-1 薄肉偏平殻構造の一般形状および座標系

運動方程式と適合条件式は平板の Karma'n の式を拡張した薄肉偏平殻の式を用いる²⁾。境界条件は、曲げに対して全周単純支持とし、面内変位 u 、 v は固定もしくは自由とする。

運動方程式の解を、境界条件を考慮して式(2)のように多自由度系に仮定する。

$$w = d \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (2) \quad \text{ここに、} T_{mn}(t) : \text{未知の時間関数, } d : \text{板厚。}$$

解析の手順として、薄肉偏平殻の式の適合条件式より、応力関数 F を式(2)を用いて解き、面内方向の境界条件の下に決定する。

運動方程式に、たわみの仮定および応力関数を代入して Galerkin 法を適用する。本研究では、1次モードと1個の高次モードを選ぶ。この場合、次のような時間に関する非線形連立運動方程式が得られる。

$$\ddot{T}_{11} + 2h_{11}\dot{T}_{11} + (1+a\lambda^2)T_{11} + b\lambda T_{11}^2 + c\lambda T_{11}^2 + dT_{11}^3 + T_{11}T_{ij}^2 = fp \cos \omega \tau \quad (3)$$

$$\ddot{T}_{ij} + 2h_{ij}\sqrt{a}\dot{T}_{ij} + (a'+b'\lambda^2)T_{ij} + c'\lambda T_{11}T_{ij} + d'T_{ij}^3 + T_{11}^2T_{ij} = \delta_{ij}f'p \cos \omega \tau \quad (4)$$

ここに、 $a, b, c, d, e, f, a', b', c', d', e', f'$: 係数、 δ_{ij} : Kronecker のデルタ関数、 h, h_{ij} : 減衰定数、

$\omega = \Omega / \omega_0$: 無次元固有振動数、 $p = p_0 R_x / E d \pi^2$: 荷重強度、 Ω : 励振円振動数、 $\tau = \omega_0 t$: 無次元時間、

$(i, j) = (1, 2), (2, 1), (2, 2), \dots$ 、 $\omega_0 = \sqrt{1+a\lambda^2} \sqrt{\rho d R_x / E}$ 、 ρ : 板の密度、 E : ヤング率。

上式(3)、(4)の解を次式のように仮定する。

$$T_{11} = c_0^{11} + c_1^{11} \cos \omega \tau + s_1^{11} \sin \omega \tau + c_{1/2}^{11} \cos \frac{\omega}{2} \tau + s_{1/2}^{11} \sin \frac{\omega}{2} \tau \quad (5) \quad T_{ij} = c_0^{ij} + c_1^{ij} \cos \omega \tau + s_1^{ij} \sin \omega \tau \quad (6)$$

ここに、 $c_0^{11}, c_1^{11}, s_1^{11}, c_{1/2}^{11}, s_{1/2}^{11}$: 1次モードの振幅成分、 $c_0^{ij}, c_1^{ij}, s_1^{ij}$: 高次モードの振幅成分。

上式(5)、(6)を、時間に関する非線形運動方程式(3)、(4)に代入して調和バランス法を適用すると、連立非線形代数方程式が得られる。これに、Newton-Raphson 法を適用して解けば、解が得られる。

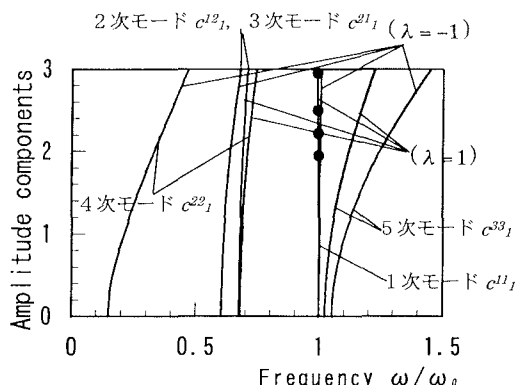


図-2 非線形自由振動曲線
($k = 0.001, a/Rx = 0.4$)

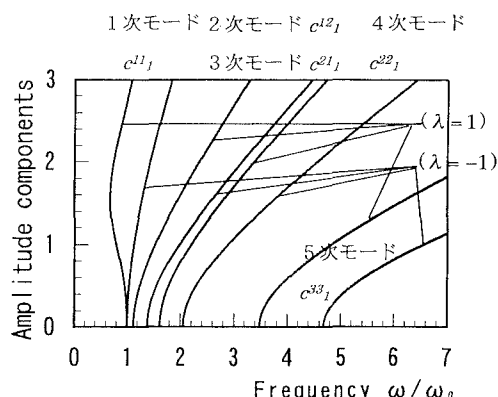


図-3 非線形自由振動曲線
($k = 0.001, a/Rx = 0.1$)

3. 解析結果

パラメーターとして次の諸量を用いる.

$k = d/Rx$, $r = Rx/a$, $\lambda = Rx/Ry$: 曲率半径比. また, 本研究ではポアソン比 $\nu = 0.3$, 縦横比 $\mu = a/b = 1$, 減衰定数 $h = 0$ とする.

(1) 非線形自由振動 図-2は $k=0.001$, $a/Rx=0.4$, 図-3は $k=0.01$, $a/Rx=0.1$ の1次モード T_{11} , 2次モード T_{12} , 3次モード T_{21} , 4次モード T_{22} および5次モード T_{33} の曲率半径比 $\lambda=1, -1$ の非線形自由振動曲線を示している. 縦軸は振幅の変動成分 $c_{11}^{11}, c_{11}^{12}, c_{11}^{21}, c_{11}^{22}, c_{11}^{33}$, 横軸は無次元振動数 ω/ω_0 を取っている. 図-2および図-3の1次モードの非線形自由振動は曲率半径比の影響を受けるが, 2次, 3次, 4次および5次モードの非線形自由振動では, 曲率半径比によって固有円振動数が大きく変わり, また硬化バネの特性のみが現れている. 運動方程式内の2次の非線形項の単独項が入っていないためと考えられる. また, 図-2には $\lambda=1$ の Runge-Kutta-Gill 法による数値シミュレーション結果を●印でプロットしている. 解析解とシミュレーションとの結果はほぼ一致し, 解析の精度は十分であるといえる.

(2) 非線形強制振動 図-4, 5は $\lambda=1$ と -1 の1次モードの応答曲線を示している. 縦軸は振幅成分, 横軸は無次元加振振動数 Ω/ω_0 をとっている. また荷重強度は, 無次元加振振動数 $\Omega/\omega_0 = 0$ のとき, 主共振の振幅 $c_1^{11} = 0.4$ となるように取っている. 固有振動数 $\Omega/\omega_0 = 1$ 付近に生じる主共振 c_1^{11} に加え,

固有振動数の2倍 $\Omega/\omega_0 = 2$ 付近に $1/2$ 分数調波共振 $c_{1/2}^{11}, s_{1/2}^{11}$ が現れている. $\lambda = -1$ では硬化バネの特性のみが現れているが, $\lambda = 1$ では振幅の大きさによって軟化・効果バネの両特性が現れている.

4. まとめ

1次モードの非線形強制振動を解析したが, 今後, 高次モードの影響を考慮した非線形強制振動を解析する予定である.

参考文献

- 1) Takahashi, K. and Midou, S. : Theoretical and Applied Mechanics, Vol.48, 1999.
- 2) Kanazawa, K. and Hangai, R. : Theoretical and applied Mechanics, Vol.25, 1977.

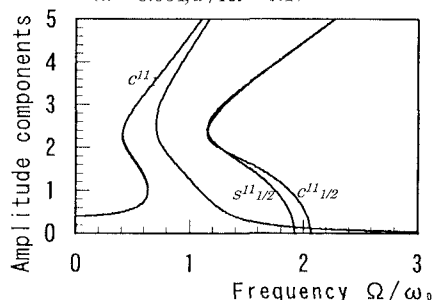


図-4 応答曲線

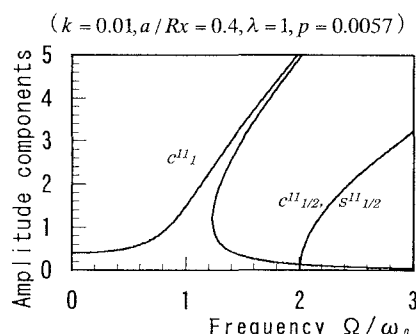


図-5 応答曲線

($k = 0.01, a/Rx = 0.4, \lambda = -1, p = 0.00029$)