

開口部を持つ変厚矩形板の曲げ・振動解析

長崎大学 大学院 学生員 ○今道 功治
 長崎大学 工学部 正 員 崎山 毅
 長崎大学 工学部 正 員 松田 浩
 長崎大学 工学部 正 員 森田 千尋

1 はじめに

変厚矩形板の基礎微分方程式は、任意の関数として与えられる板厚および板剛度を係数とする変数係数の連立偏微分方程式となるため解析解を一般に求めることはほとんど不可能であると考えられる。そこで著者らは基礎微分方程式の積分方程式への変換と、積分方程式の近似解法の応用とにより変厚矩形板の基礎微分方程式の解析的近似解を求めた離散的近似解法¹⁾を提案し、変厚矩形板の曲げおよび振動解析を行っている。この解法をさらに開口部といった不連続な平板に適用できるように解析を発展させ、得られた近似解を他解析解と比較検証した結果をここに報告する。

2 基礎理論

2.1 曲げ解析の基礎理論

Reissner の平板曲げ理論に基づいた変厚矩形板の曲げに関する基礎微分方程式に無次元量を導入する。ここで図1に示すような矩形板の縦横の等分割線の交点を対象とする離散点における基礎微分方程式の近似解を求める。そこでまず矩形板の全領域 $[i, j]$ において面積分し積分方程式に変換する。次に、等間隔の数値積分法の応用により、領域 $[i, j]$ の主要点 (i, j) および従属点 $[f, g]$ の諸量を用いて、これらの積分方程式を離散表示すれば、主要点 (i, j) における無次元化された断面力および変形に関する連立方程式が得られる。これを解くことにより近似解が次式によって表される。

$$X_{pij} = \sum_{d=0}^6 \left(\sum_{f=0}^i a_{1pijfd} X_{rf0} + \sum_{g=0}^j a_{2pijgd} X_{s0g} \right) + q_{pij} \quad (1)$$

ここに、 X_{pij} は主要点 (i, j) における無次元化された断面力および変形であり、 $p = 1, 2, \dots, 8$ がそれぞれ順にせん断力 Q_y, Q_x 、ねじりモーメント M_{xy} 、曲げモーメント M_y, M_x 、たわみ角 θ_y, θ_x 、たわみ w に対応し、 a_{1pijfd}, a_{2pijgd} は断面形状を伝えるマトリックス、 X_{rf0}, X_{s0g} は積分定数、 q_{pij} は荷重項である。

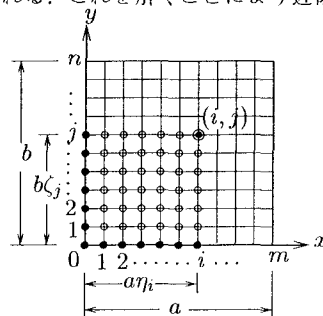


図1: 矩形板の等分割図

2.2 振動解析の基礎理論

基本的に曲げ解析で用いた基礎微分方程式を基とするが、鉛直方向における力のつり合い方程式の場合に、横荷重強度として単位面積当りの慣性力を用いる。次に、振動解析では固有振動数を対象とするため矩形板に単位集中荷重が作用した場合の全体たわみを基本解としたグリーン関数を求める。まず、前述の鉛直方向の運動方程式に基本解であるたわみ $\bar{w}$ を乗じ、矩形板の全領域 $[i, j]$ にわたり面積分を行い、整理し定式化する。これにより、境界条件を考慮して導かれた境界積分方程式が求まり、この式に無次元量を導入する。次に、 $\lambda^4 = \frac{\rho h_0 \omega^2 a^4}{D_0}$ なる無次元化固有振動数を定義し、等間隔の数値積分法を用いると基本解の近似解が次式となる。

$$w(\eta_0, \zeta_0) = \lambda^4 \sum_{\eta=0}^m \sum_{\zeta=0}^n \beta_{m\eta} \beta_{n\zeta} \mu \bar{h}(\eta, \zeta) w(\eta, \zeta) G(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) \quad (2)$$

この式をマトリクス表示し、固有値計算を行うと矩形板の固有振動数が求まる。

ここに、 $\mu = \frac{b}{a}$ 、 $G(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) = \frac{D_0}{\rho a^2} \bar{w}(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta)$ 、 $\beta_{m\eta}, \beta_{n\zeta}$ は数値積分による重み係数、 $w(\eta_0, \zeta_0)$ は点 (η_0, ζ_0) に単位集中荷重を作用させた時の点 (η_0, ζ_0) のたわみ、 $\bar{w}(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta)$ は点 (η_0, ζ_0) に単位集中荷重を作用させた時の各点 (η, ζ) のたわみである。

2.3 開口部を持つ変厚矩形板のモデル化

本解析では、2.1で述べたように主要点 (i, j) の諸量を従属点 $[f, g]$ を用いて求めるため、開口部の板厚を $h = 0$ とみなすことができない。そのため板厚を非常に薄くすることにより、開口部を持つものと近似化した。

3 数値解析結果と考察

数値解析例として、今回の変厚矩形板は、図2に示すように $x = 0$ 上を基準板厚 $h_0/a = 0.01$ とし、 x 方向にのみ直線的に変化する板厚 $h(x) = (1 + \alpha \frac{x}{a})h_0$ で表されるもので周辺単純支持とする。この矩形板に変厚比 α を0.0～1.0まで変化させ、それぞれ解析を行った。なお、開口部の位置と形状は、中央に一辺 γa の正方形の開口とする。

まず曲げ解析に関して、開口辺比が $\gamma = 1/2$ の変厚正方形板に等分布荷重をかけた場合の任意点Aのたわみを表1に示した。なお、収束値は20, 24分割の値を用いてRichardsonの補外公式で求めた。いずれの変厚比でも分割数を増すごとに徐々に収束していることがわかる。変厚比 $\alpha = 0.0$ の解では比較解に対してはほぼ近い値が得られた。

次に、振動解析に関して開口辺比が $\gamma = 0, 2/6, 3/6, 4/6$ の4通りの場合の基本固有振動数を図3に示した。それぞれほぼ一定の割合で振動数が高くなっていることがわかる。

表1: 点Aのたわみ $\times qa^4/D_0 \times 10^{-3}, \nu = 0.3, \gamma = 1/2 >$

変厚比 α	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
8×8 分割	3.79	3.08	2.53	2.11	1.77	1.50
12×12 分割	3.50	2.86	2.37	1.99	1.68	1.43
16×16 分割	3.38	2.77	2.30	1.93	1.64	1.40
20×20 分割	3.32	2.72	2.26	1.90	1.61	1.38
24×24 分割	3.28	2.69	2.24	1.88	1.60	1.37
収束値 (20 - 24)	3.19	2.62	2.19	1.83	1.58	1.35
写像法 ²⁾	3.14	—	—	—	—	—
F.E.M. ³⁾	3.23	—	—	—	—	—

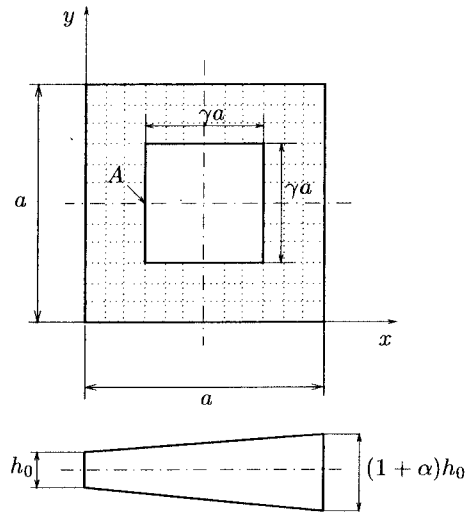


図2: モデル図

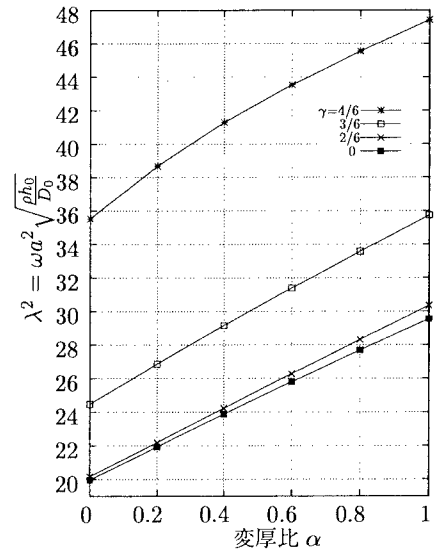


図3: 基本固有振動数

4 結語

本解析法を用いると、矩形板の縦横の等分割線の交点のみの荷重状態および板厚、板剛度の諸量を決定しておけば、矩形板内の不連続な条件でも比較的簡単に解析できる。しかし、問題点としては、等間隔の分割を前提としているため、開口部の形状には分割数の制限がからんでくる。

【参考文献】

- 1) 崎山毅, 松田浩: 変厚矩形板の曲げの一解析法, 土木学会論文報告集, 第338号, pp.21-28, 1987
- 2) 岩原昭次: 等分布荷重を受ける有孔弾性平板の曲げに関する解析的研究, 日本建築学会論文報告集, 第288号, pp.85-95, 昭55.2
- 3) 土橋由造, 内山武司等: 有限要素法-混合法-の方形有孔床版への適用, 建築学会北海道支部第35回研究発表会, 昭46.8