三角形厚板の自由振動解析

長崎大学大学院 学生員 ○ 日高慎士郎 長崎大学工学部 正会員 崎山 毅
長崎大学工学部 正会員 松田 浩 長崎大学工学部 正会員 森田千尋

1. 緒 論

近年，構造物は巨大化，軽量化の傾向にあり，美観性・経済性などの観点からも，単純な形状のものばかりではなくなってきている．また，地震などの強制力や強制変位の振動数が，構造物の固有振動数と一致すると共振し，構造物の崩壊にもつながる恐れがあり，多様化する構造物それぞれについてこの固有振動数を把握しておくことは大変重要である．

一方，変厚矩形板の基礎微分方程式は変数係数の連立偏微分方程式となるため，その解析解を一般的に求めることはほぼ不可能である．そこで私達は，ここ数年で既往の解法に代わり，矩形板全体を交点の集合体とみなし，離散点において直接的に解析する離散的近似解法を確立することで，解法の適用性を試みた．その変厚矩形板の曲げ解法における解析解の実用性については，文献1) で実証済みである．そこで本研究では，その離散的近似解法が任意形状にも適用できることを検証するために，せん断変形を考慮すべき板厚をもつ三角形厚板を例にとり，薄板と比較しながら自由振動解析を行う．

2. 解析方法

2.1 解析理論

まず矩形板の力の釣り合いによる基礎微分方程式 (*Reissner* の平板曲げ理論) に無次元量を導入する．次に，任意の矩形板に関して，任意の境界条件のもとで基礎微分方程式の解析解を一般的に求めるのは困難なため，縦横の等分割線の交点に注目し，板全体をこれらの交点の集合体 (図1) とみなす．領域 $[i,j]$ において面積分したあと，積分方程式に変換する．さらに等間隔の数値積分法の応用により主要点 (i,j) および従属点 (f,g) の諸量を用いて，積分方程式を離散表示することで，X_{pij} に関する連立方程式を得られ，さらにその方程式を解くことで，主要点 (i,j) の諸量と境界従属点および内部従属点との関係式が得られる．領域 $[i,j]$ を順次拡大しつつ，関係式に代入することで内部従属点はすべて消去され，次式のように整理される．

$$X_{pij}=\sum_{d=1}^{6}(\sum_{f=0}^{i}a_{1pijfd}\cdot X_{rf0}+\sum_{g=0}^{j}a_{2pijgd}\cdot X_{s0g})+q_{pij}$$

点支持を入れる場合には，基礎微分方程式が変わり同様に導くと次式が得られる．

$$X_{pij}=\sum_{d=1}^{6}(\sum_{f=0}^{i}a_{1pijfd}\cdot X_{rf0}+\sum_{g=0}^{j}a_{2pijgd}\cdot X_{s0g})+q_{pij}$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\sum_{c=0}^{m}\sum_{d=0}^{n}q_{kpijcd}P_{kcd}$$

さらに四辺単純支持・四辺固定支持等の境界条件より，未知量と既知量を出し，上式をマトリックス表示する．次に自由振動解析を行うための単位面積当りの慣性力をとることで矩形板の曲げ振動に関する運動方程式を得る．これを境界積分方程式に変換し，無次元にすると次式が導かれる．

$$\bar{w}(\eta_0,\zeta_0)=\lambda^4\sum_{\eta=0}^{m}\sum_{\zeta=0}^{n}\beta_{m\eta}\beta_{n\zeta}\bar{\mu}\bar{h}\bar{w}(\eta,\zeta)G(\eta_0,\zeta_0,\eta,\zeta)$$

ここで G: たわみのグリーン関数，(η,ζ): 積分点

(η_0,ζ_0): 単位集中荷重の載荷点

$\beta_{m\eta},\beta_{n\zeta}$: 数値積分による重み係数

であり，本解析法では矩形板に単位集中荷重が作用した場合の矩形板全体のたわみである基本解 (グリーン関数) が必要なため，基本解に対する基礎微分方程式を求め，離散的近似解法で求める．さらに，自由振動解析を行うためマトリックス表示し，行列式の値を0にする $1/\lambda^4$ を求めることにより固有値が求まる．

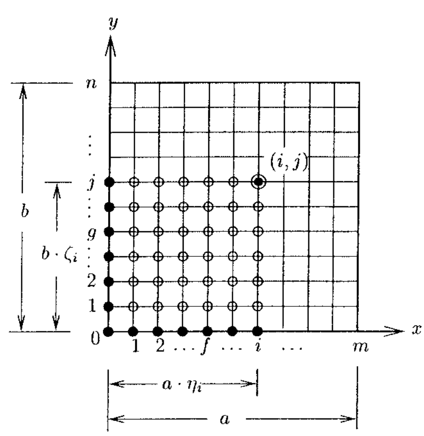

図1 矩形板における離散点

2.2 解析モデル

解析の対象は直角二等辺三角形とする．その場合の斜辺上の境界条件の扱い方として，単純支持は図2の h_1 部分を h_0 部分より薄くし，斜辺上に点支持を入れ，$x = m, y = n$ 辺上を自由端にする．固定支持は h_1 部分を h_0 部分より厚くし，$x = m, y = n$ 辺上を固定端にする．自由端の場合は h_1 部分を h_0 部分より極端に薄くし，$x = m, y = n$ 辺上を自由端にする．

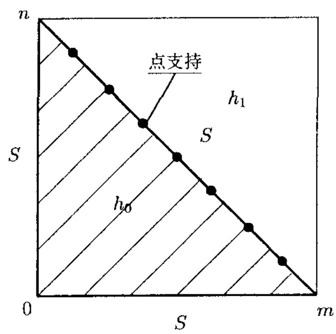

図2　直角三角形板における三辺単純支持

3. 解析結果

本解析法における数値解の収束性および精度を検討するため，三角形板の固有振動数および振動モードを既往の近似解法による解析解と比較する．Kim 等による解2)では，薄板を $Rayleigh-Ritz$ 法を用いて解析している．一方，本解析ではせん断変形を考慮した平板理論に基づいているので，両者を比較するため，せん断変形の影響を十分に無視できる薄板を取り扱えるように，板厚 h_0 と辺長 a の比が $h_0/a = 0.01$ である薄板について解析した．

表1は三辺単純支持の結果で分割数14と16で解析値を算出させたが，かなり粗い分割数における解析値により補外公式を適用し収束させることで，解析における精密度を上げることを試みた．その収束値と比較解を比較したが，誤差は平均5%以内におさまり十分実用性があると言える．

次に，振動モードを図3に示し，それぞれを比較検討してみた．2次モードは斜辺に，3次モードには二等辺に2分割するように，5次モードには三角形板を4分割するように，6次モードでは二等辺に3分割するようにノーダルラインが入る．

尚，薄板の種々の境界条件とせん断変形の影響を受ける三角形板の解析結果については，当日に発表する予定である．

4. 結　論

矩形板を厚く，または薄くすることで任意形状の一部である三角形板を解析したが，解析結果で十分に適用できることを示した．本研究は，離散的近似解法を任意形状に適用できることを確立できると同時に，数値解が一様な収束性を持ち，その値は分割数を上げるにつれ精度を増すことが確認できる．さらに，補外公式を用い収束値を算出すると比較解に近づくことから，さらに分割数を上げることでかなりの精度を得ることが期待できる．今後は，三角形の形を変えて，自由振動解析だけでなく弾塑性解析にも発展させていく予定である．

表1　三辺単純支持

$(\lambda = \sqrt[4]{\omega^2 a^4 \rho h_0 / D_0 (1-\nu^2)}, \nu = 0.3)$

分割数	1次	2次	3次	4次	5次	6次
薄板 14	6.91	9.92	11.41	13.19	14.59	16.30
16	6.83	9.71	11.23	12.88	14.15	15.92
収束値	6.54	8.99	10.65	11.88	12.71	14.66
比較解 2)	6.59	9.16	10.69	11.89	13.07	14.62

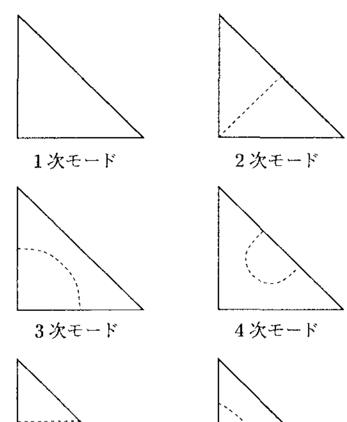

図3　三辺単純支持のモード図

参考文献

1) 土木学会論文報告集 第338号 変厚矩形板の曲げの一解析法　崎山 毅・松田 浩

2) *Journal of sound and Vibration* (1990) 141(2), 291 − 311 *C.S.Kim and M.Dickinson*