

せん断変形を考慮した積層板の座屈解析

長崎大学 大学院 学生員 ○ 原田 健司
 長崎大学 工学部 正 員 森田 千尋
 長崎大学 工学部 正 員 松田 浩
 長崎大学 工学部 正 員 崎山 毅

1 まえがき

近年、構造物の大型化、長大化に伴い自重が増すことは好ましくないため、比強度、比剛性および軽量性に優れた FRP(Fiber-Reinforced-Plastic) が土木の分野でも注目されつつある。この FRP を積層状にした積層板は、力学的に強い異方性を示し、積層数、積層順序などを変えることにより力学特性を自由に設計できる。しかしながら、FRP 積層板の力学的特性については、等質、等方性のそれと比べれば必ずしも十分な検討が行われていないのが現状である。

本研究では、面内剛性と曲げ剛性に対して面外せん断剛性が極めて小さいという特徴を持つ FRP 積層板に注目し、せん断変形を考慮した積層板の座屈挙動を明らかにすることを目的としている。

2 基礎理論

まず、積層板の基礎微分方程式に無次元量を導入し、領域 (i, j) において面積分することにより積分方程式に変換し、次に積分方程式の近似解法を応用すると、離散解は次式のように整理される。

$$X_{pij} = \sum_{d=0}^6 \left(\sum_{f=0}^i a_{1pijfd} X_{rf0} + \sum_{g=0}^j a_{2pijgd} X_{s0g} \right) + q_{pij}$$

この式中に含まれる境界従属点の諸量 X_{rf0} , X_{s0g} はいわゆる積分定数であり、境界条件によって決定される。また、 a_{1pijfd} , a_{2pijgd} は、格間伝達マトリックスに相当するものであり、 q_{pij} は荷重項である。

断面力に関しては、図1に示すように板厚の中央面から Z 軸をとり、層と層の境界面を $Z_0, Z_1, \dots, Z_{k-1}, Z_k$ とする。積層板では各層ごとに応力が異なるため、応力を板厚方向に積分し、次のように定義する。

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \sum_{k=1}^N \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})_k z dz$$

ここに、 $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})_k$ は k 番目ラミナの応力である。

また積層板の座屈に関する方程式は、 N_x のみが作用する場合を考えると次式で表される。

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

この式に、基礎微分方程式より、 $\partial w / \partial x$ を導き、代入すると

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{1}{\kappa} A_{45}^* \frac{\partial Q_y}{\partial x} - \frac{1}{\kappa} A_{55}^* \frac{\partial Q_x}{\partial x} \right) = 0$$

となる。ここに $A_{ij}^* = A_{ij}^{-1}$ であり、積層板の基礎微分方程式に用いている A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} はそれぞれ、面内剛性、カップリング剛性、曲げ剛性で、次式のように定義される。

$$A_{ij} = \sum_{k=x1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}), \quad B_{ij} = \sum_{k=x1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad D_{ij} = \sum_{k=x1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

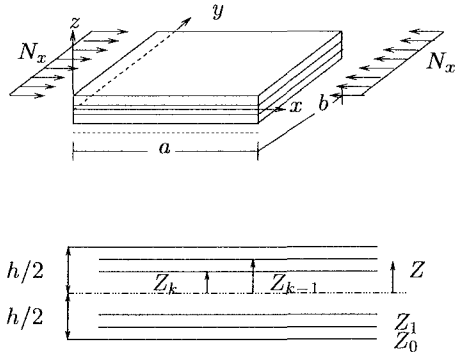


図1：積層板

3 数値解析結果

数値解析例として本研究で用いた積層板は、 $a/b = 1$ で四辺を単純支持させた対称クロスプライ積層板であり、 E_1, E_2 はそれぞれ繊維方向の弾性係数と横方向の弾性係数である。また、せん断弾性係数 G_{12}, G_{23} はそれぞれ $G_{12} = 0.6E_2, G_{23} = 0.5E_2$ とし、ポアソン比 $\nu_{12} = 0.25$ 、せん断修正係数は、 $\kappa = 5/6$ を用いた。なお解析に用いた座屈荷重(無次元量)は $\lambda_x = \frac{a^2}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}N_x$ とし、基準板剛度 D_0 は、 $D_0 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$ としている。

3.1 解法の実用性の検証

はじめに、本解析法の収束性を検証するために、弾性係数比 $E_1/E_2 = 3$ 、積層数 $3[0/90/0]$ 、 $a/h = 5 \sim 20$ での座屈荷重(無次元量)をOwenらによる解¹⁾とともに表1に示す。なお同表には、分割数 $m = n = 8, 10, 12$ の場合の座屈荷重およびRichardsonの補外公式²⁾によって求めた推定収束値を示している。

本解析法による数値解は、いずれの場合も分割数の増加とともに一様に収束し、8～12分割程度の比較的粗い分割による解析においても、実用上、十分の精度をもつ解が得られている。さらに、Richardsonの補外公式による推定収束値は、Owenらによる解に極めて近づくことが示されている。

なお、以下の計算においては、分割数 $m = n = 12$ としている。

3.2 板厚の影響

積層板の辺長 a と板厚 h の比 a/h をパラメータとして、座屈解析を行った。その結果を図2に示す。図2には、数値解およびOwenらによる解を示している。諸条件は、弾性係数比 $E_1/E_2 = 20$ 、積層数を $3[0/90/0]$ としている。板厚が座屈荷重に与える影響としては、板厚を厚くすると座屈荷重は大幅に低下していくが、 $a/h > 20$ 程度になっていくと座屈荷重はほぼ一定となる。つまりこれは、厚い積層板は、薄い積層板に比べせん断変形の影響を受けるためであると推測される。

4 あとがき

今回の解析例では、対称クロスプライ積層板の板厚の影響のみを取り扱ったが、今後は、それに加え境界条件、および積層数、積層順序などをパラメータとし、座屈特性を明らかにする。さらにアングルプライなどの積層板においても同様な座屈特性を明らかにしていく予定である。

最後に、本研究を進めるに際して、数値計算を行って戴いた当大学4年生、有吉健君、西岡良徳君に謝意を表します。

参考文献

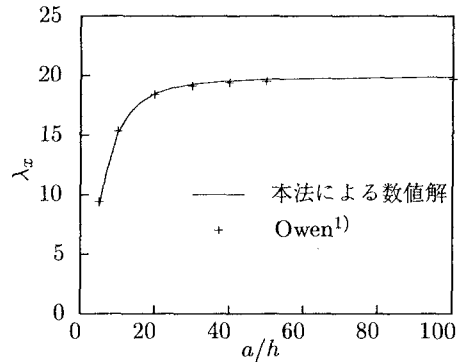
- 1) D.R.J.Owen : A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods-II, Computers & Structures Vol.26, No.6, pp.915-923, 1987.
- 2) Salvadri, M. : Numerical computation of buckling loads by finite differences, Transactions ASCE, Vol.116, pp.590-636, 1951.

表1：積層板の座屈荷重

($E_1/E_2 = 3, \nu_{12} = 0.25$, 積層数 = 3)

$m = n$	a/h		
	5	10	20
8	4.6458	5.5288	5.8061
10	4.6115	5.4730	5.7527
12	4.5931	5.4544	5.7241
Ex.V	4.5517	5.4426	5.6599
Owen ¹⁾	4.5597	5.4026	5.6679

EX.V.=Extrapolated Values [10-12]



($E_1/E_2 = 20, \nu_{12} = 0.25$, 積層数 = 3)

図2：板厚による座屈荷重への影響