

大次元構造モデルによる道路橋交通振動評価のための共分散方程式の解法

長崎大学工学部 学生会員 岡谷まり子 長崎大学工学部 フェロー 岡林隆敏
長崎大学大学院 学生会員 串山智恵美

1. はじめに

近年、道路橋は、道路交通の需要に伴って、巨大化、長大化している。このような橋梁の交通振動解析を行なうには、大次元構造モデルを用いることが必要となってくる。また、交通振動は、不規則振動として取り扱うので、橋梁の交通振動応答を求めるには、大次元の共分散方程式を解く必要がある。本研究では、大次元の共分散方程式を用いた不規則振動解析の数値解法とその事例を示した。

2. 橋梁 - 車両 - 路面系の状態方程式

図 - 1 のような路面凹凸 $r(t)$ を有する橋梁上に単一車両が走行する場合の、橋梁 - 車両 - 路面凹凸系を考える。橋梁および車両の運動方程式は、次式のように表わされる。

$$\ddot{q}_k(t) + 2h_k\omega_k\dot{q}_k(t) + \omega_k^2q_k(t) = -\mu_{kz}\phi_k(vt)\ddot{z}(t) \quad (1)$$

$$\ddot{z}(t) + 2h_0\omega_0\{\dot{z}(t) - \dot{y}(vt, t) - \dot{r}(t)\} + \omega_0^2\{z(t) - y(vt, t) - r(t)\} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $q_k(t)$ は k 次の基準座標、 $\phi_k(vt)$ は k 次の振動モード、 $z(t)$ は車両の垂直変位、 $h_k, \omega_k, h_0, \omega_0$ は橋梁、車両の減衰定数、固有円振動数、 $y(vt, t)$ は vt 点の橋梁の垂直変位、 μ_{kz} は橋梁の k 次の有効質量と車両の質量の比、 v は車両速度である。また、路面凹凸のパワースペクトル密度は $S_r(\omega) = S_0/(\omega^2 + \beta^2)$ (3)

と近似することができる。ここで、 $S_0 = 2\pi vA$ 、 $\beta = 2\pi va$ であり、 A は路面の良否を表わす定数、 a は実測結果より決定する定数である。(3)式のパワースペクトル密度を有する正規性確率過程 $r(t)$ で、路面凹凸をモデル化する。図 - 2 に路面凹凸のスペクトルを示す。白色雑音過程 $n(t)$ を入力して、路面凹凸は次式のように表わされる。

$$\dot{r}(t) + \beta r(t) = n(t) \quad (4)$$

橋梁の基準座標ベクトルを $q(t)$ とし、状態変数 $X(t)$ を

$$X(t) = [q^T(t) \quad \dot{q}^T(t) \quad z(t) \quad \dot{z}(t) \quad r(t)]^T \quad (5)$$

と定義する。この状態変数を用いると、(1)式、(2)式、(4)式は、次式の状態方程式で表わすことができる。

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)n(t) \quad (6)$$

3. 共分散方程式による定常応答解析

橋梁の共分散を $R(t) = [X(t)X^T(t)]^T$ と定義すると、(6)式に対する共分散方程式は、次式で表わされる。

$$\dot{R}(t) = A(t)R(t) + R(t)A^T(t) + Q, \quad Q = B(t)B^T(t)\sigma^2 \quad (7)$$

ここで、 $\sigma^2 = 2\pi S_0$ であり、 σ^2 は白色雑音 $n(t)$ の強度である。車両が、橋梁のある点に位置し、定常な接地圧を加えるものとする、定常応答解析の問題になる。 $t \rightarrow \infty$ では、 $R(t)$ は定常応答となり、(7)式は、次式のような連立方程式となる。

$$AR(t) + R(t)A^T + Q = 0 \quad (8)$$

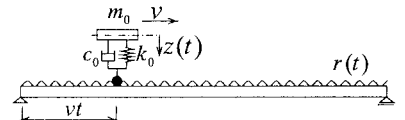


図 - 1 橋梁 - 車両 - 路面凹凸系

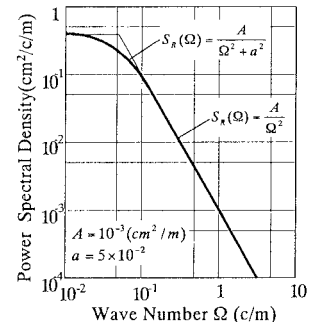


図 - 2 路面凹凸のスペクトル

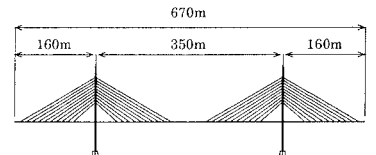


図 - 3 解析対象構造物

表 - 1 構造物の諸元

橋長	670m
走行車両速度	50km/h
自動車荷重	25t
橋梁形式	3 径間連続鋼斜張橋

表 - 2 構造物の振動特性

振動次数	振動モード	振動数(Hz)
1 次	上下 1 次	0.231900
2 次	水平 1 次	0.305453
3 次	上下 2 次	0.413475
4 次	上下 3 次	0.693794
5 次	水平 2 次	0.801869
6 次	上下 4 次	0.920752
7 次	上下 5 次	1.097604
8 次	水平 3 次	1.278872
9 次	水平 4 次	1.396733
10 次	上下 6 次	1.561476

(8)式は、次のようなアルゴリズムを用いて解くことができる。

$$\begin{aligned} R_{k+1}(t) &= R_k(t) + e^{2^k A d} R_k(t) e^{2^k A^T d} \\ R_0(t) &= Qd \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (9)$$

$e^{A h}$ は 3 次の Pade 近似を用いて次式のように近似できる。

$$\begin{aligned} e^{A d} &= \left(I - (dA)/2 + (d^2 A^2)/12 \right)^{-1} \\ &\quad \times \left(I + (dA)/2 + (d^2 A^2)/12 \right) \quad (10) \end{aligned}$$

ここで、 k は収束回数、 d は時間刻みである。(9)式において、 $R_k(1,1) = 10^{-10}$ となる時に R_{k+1} は収束し、その時の k を収束回数とする。

(7)式のような非定常時の共分散方程式を用いて数値解析を行なうには、莫大な計算時間と記憶容量が必要になる。一方、(9)式を用いた収束計算によると、この方法は収束条件を指定し、必要以上の計算をさせないようにするため、計算時間の短縮を図ることができる。

図 - 3 に解析構造物の一般図、表 - 1 に構造物の諸元、表 - 2 に構造物の振動特性を示す。

4. 数値解析結果と考察

重量 20tf の車両が 50km/h で走行する場合の、橋梁の応答解析を観測点 $L/2, 3L/8$ で行なった。なお、橋梁の 100 次振動までを考慮した。図 - 4 に $L/2$ 点での応答の標準偏差の収束結果を示す。また収束結果と比較するために、 $L/2$ 点および $3L/8$ 点における時刻歴応答結果を図 - 5、図 - 6 に示す。

$L/2$ 点における変位の標準偏差の収束値は $\sigma_y = 2.1 \times 10^{-4} (m)$ 、速度の標準偏差の収束値は $\sigma_v = 3.2 \times 10^{-3} (m/s)$ である。収束回数は、どちらも 20 回である。また、変位、速度の時刻歴応答の図に破線で標準偏差を、一点破線で標準偏差の 2 倍を示した。標準偏差は、時刻歴応答の平均値に対応し、標準偏差の 2 倍の値は、時刻歴応答のピーク値に対応している。変位、速度ともに、時刻歴応答のレベルとよく一致していることがわかる。 $3L/8$ 点における変位の標準偏差の収束値は $\sigma_y = 1.9 \times 10^{-4} (m)$ 、速度の標準偏差の収束値は $\sigma_v = 3.2 \times 10^{-3} (m/s)$ である。収束回数は $L/2$ 点と同様、どちらも 20 回である。速度については、時刻歴応答のレベルとよく一致しているが、変位は時刻歴応答のピーク値より小さくなっている。また、収束計算による計算時間は 1 分程度、時刻歴応答による計算時間は 30 分程度である。(P III 600MHz) 収束計算は時刻歴応答の約 1/30 の計算時間で応答レベルを得ることが可能である。

5. まとめ

橋梁の応答は、応答の標準偏差を求めることで、ある程度の性状を得ることができる。そして、このような結果を、強度の設計や、環境基準を定める場合に用いることができる。本解析法の計算時間は時刻歴応答に比べ確実に早い。また、本解析法の応答レベルは、時刻歴応答のレベルと一致するため、本解析法の妥当性が確認できた。現在、本解析法を用いて加速度応答に関する解析法を検討中である。

【参考文献】

E.J.Davison, F.T.Man: IEEE, Transactions on Automatic Control, pp.448-449, 1968.8

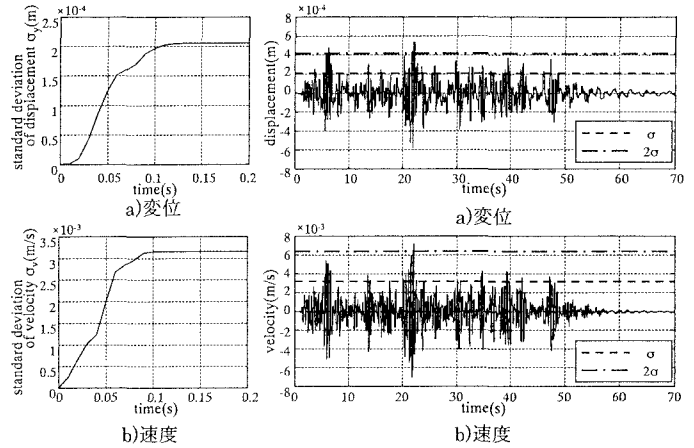


図 - 4 応答の標準偏差 ($L/2$ 点)

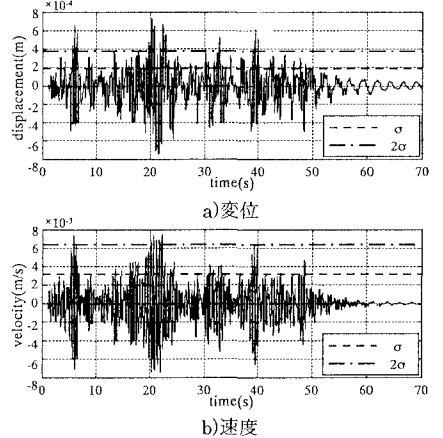


図 - 5 時刻歴応答 ($L/2$ 点)

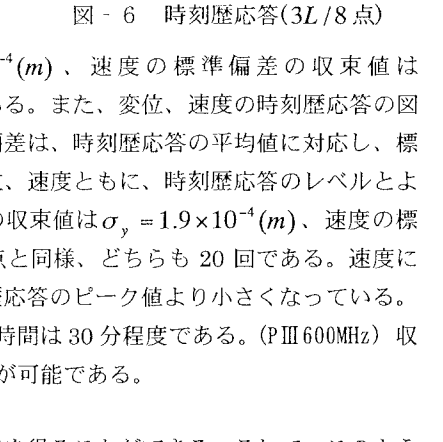


図 - 6 時刻歴応答 ($3L/8$ 点)