

緩斜面上のサーマルに関する理論的考察

九州工業大学大学院 学生員○末広 祐志

九州工業大学工学部 正会員 秋山 壽一郎、浦 勝

1. はじめに

緩斜面上のサーマルは地滑りや埋立工事に伴う水域における濁りの発生などの水質環境問題と深く関わっており、その流動特性を明らかにすることは工学上極めて有用である。本研究は、緩斜面(傾斜角度 $\theta=1^\circ \sim 10^\circ$)上における2次元サーマルに対してサーマル理論の適用性について調べ、その流動特性の予測を行ったものである。

2. サーマル理論

周囲流体(密度 ρ_s)より重い初期単位幅体積 A_0 の流体(密度 ρ_0)が瞬間的に水平面と角度 θ をなす斜面上に放出されると、単位幅体積 A 、密度 ρ の傾斜サーマルを形成する。このようなサーマルを図1のようにモデル化する。図中で、 B は平均浮力 $(=\rho(\rho_0)g/\rho_0)$ 、 W は総

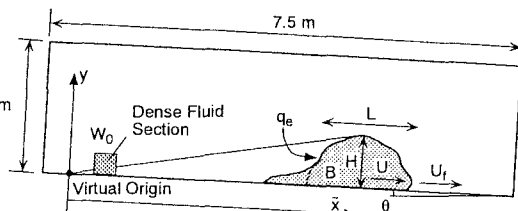


図1 定義図

浮力 $(=AB)$ 、 U は重心移動速度、 q_e は周囲流体の連行率である。現象のモデル化に当たって、(1)サーマルの形状は流下に際して半楕円形状の相似形に保たれる、(2)サーマルの内部は完全混合状態である、(3)ビジネスサーマルである、と仮定する。ただし、仮定(1)の妥当性については、実験的に確認されている。

図1で定義されたサーマルの断面積 A 、周囲長 C とサーマルの最大層厚 H および長さ L との関係はそれぞれ次のように表される。

$$A = S_1 HL \quad (1) ; \quad C = S_2 \sqrt{HL} \quad (2)$$

ここに、 S_1 はサーマルの断面面積比、 S_2 は幾何学的平均長さ周囲長との比であり、サーマル形状が半楕円形である場合はそれぞれ次式のようにになる。ここに、 F は式(5)で定義されるサーマルの断面アスペクト比である。

$$S_1 = \frac{\pi}{4} \quad (3) ; \quad S_2 = \frac{(\pi/2)^{1/2} \sqrt{4F^2 + 1}}{\sqrt{F}} \quad (4) ; \quad F = \frac{H}{L} \quad (5)$$

連行はサーマルの全周囲から行われると仮定すると、連行率 q_e は連行係数 E_d を用いて式(6)のように表される。

$$q_e = S_2 \sqrt{HLE_d} U \quad (6)$$

仮想原点からの距離 $\tilde{x}$ を独立変数とするサーマル理論は次のようになる。

$$\frac{dH}{d\tilde{x}} = \frac{1}{2} \left(\frac{S_2}{S_1} \right) \sqrt{FE_d} \quad (7) ; \quad \frac{dB}{d\tilde{x}} = -\frac{B}{H} \left(\frac{S_2}{S_1} \right) \sqrt{FE_d} \quad (8) ; \quad \frac{dR_i}{d\tilde{x}} = \frac{3R_i}{H} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{S_2}{S_1} \right) \sqrt{FE_d} + \frac{2}{3} \frac{FC_d - S_1 R_i \tan \theta}{S_1 (1 + A_m)} \right] \quad (9)$$

また、サーマルの幾何学的関係より、 U_f は次式で与えられる。

$$\frac{U_f}{U} = 1 + \left(\frac{1}{2F} \right) \left(\frac{dH}{d\tilde{x}} \right) \quad (10)$$

ここに、 A_m は付加質量係数、 C_d は抵抗係数である。

最大層厚 H 、平均浮力 B および重心移動速度 U についての解析解はそれぞれ式(11)、(12)および(13)のようになる。

$$\frac{H}{\tilde{x}} = K_1 \quad (11) ; \quad \frac{B}{W/\tilde{x}^2} = K_2 \quad (12) ; \quad U = \sin \theta \sqrt{\left(\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{x}} \right)^\alpha U_i^2 + \frac{2\beta}{\alpha - 1} \left(\frac{\tilde{x}^{\alpha-1} - \tilde{x}_i^{\alpha-1}}{\tilde{x}_i^\alpha} \right)} \quad (13)$$

ここに、 U_i は積分定数を決定するために導入された仮想原点からの任意の降下距離 $\tilde{x}_i$ における重心移動速

度である。なお、式(13)中の α および β はそれぞれ次式で与えられる。

$$\alpha = 4 \left\{ 1 + \frac{\sqrt{FC_d}}{(1+A_m)E_d S_2} \right\} \quad (14) ; \quad \beta = \frac{4S_1 W}{(1+A_m)E_d^2 S_2^2} \quad (15)$$

式(13)において $\bar{x}/\bar{x}_0 \gg 1$ とすると、十分に発達したサーマルに対するUの漸近解が次のように得られる。

$$\frac{U}{\sqrt{W/\bar{x}}} = K_3 \quad (16)$$

ここに、式(11)、(12)および(16)中の K_{1-3} は実験結果に基づき決定される以下のような関数である。

$$K_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{S_2}{S_1} \right) \sqrt{FE_d} \quad (17) ; \quad K_2 = \frac{4S_1}{(S_2 E_d)^2} \quad (18) ; \quad K_3 = \left[\frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{S_2}{S_1} \right) \sqrt{FE_d}} \cdot \frac{\sin \theta}{\frac{3}{4} (1+A_m) S_2 \frac{E_d}{\sqrt{F}} + C_d} \right]^{1/2} \quad (19)$$

以上の解析解において、急斜面上のサーマルでは初期総浮力 W_0 が流下に際してほぼ保存されるので $W \approx W_0$ であるが^{(1),(2)}、緩斜面上のサーマルでは W_0 が保存されないで $W \neq W_0$ となる。初期総浮力 W_0 が流下に際して保存されるか否かが急斜面上と緩斜面上のサーマルの最大の違いである。

$A_0 = 100 \text{ cm}^2$ の場合の総浮力比 $\lambda (=W/W_0)$ と流下距離 x との関係を実験的に調べた結果が図2である。これより、 λ は流下に際してほぼ一定に保たれることがわかる。図3は総浮力比 λ と θ との関係について調べたものである。これより緩斜面上のサーマルでは、 λ を次のように近似することができる。

$$\lambda = 0.0475\theta + 0.175 \quad \text{for } \theta = 1^\circ \sim 17.5^\circ \quad (20)$$

3. サーマル理論の検証

紙面の都合で詳細は省略するが、初期条件を適正に考慮することによって、十分に発達した状態では解析解、漸近解および数値解は完全に一致することが確かめられた。そこで、数値解と実験値とを比較した一例($\theta = 3^\circ$, $W_0 = 11760 \text{ cm}^3/\text{s}^2$)が図4である。ここで、緩斜面の場合の経路則($F = 0.218$, $E_d = 0.0058\theta$, $A_m = 2F$, $C_d = 0.192$)を用いている。

以上より、急斜面上の場合と同様に緩斜面上においても十分に発達したサーマルでは最大厚 H 、平均浮力 B および重心移動速度 U はそれぞれ流下距離の1乗、-2乗および-1/2乗に比例すること、初期総浮力 W_0 に対してはそれぞれ一定、1乗および1/2乗に比例し、傾斜角度 $\theta = 1^\circ \sim 10^\circ$ の範囲でもサーマル理論が適用できること、などがわかった。

参考文献

- 1) 秋山・浦・斎藤；水工学論文集，第40巻，pp.549-554.
- 2) 秋山・浦・末広；水工学論文集，第42巻，pp.511-516.

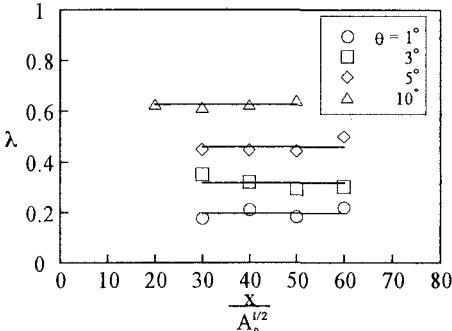


図2 λ と $x/A_0^{1/2}$ との関係

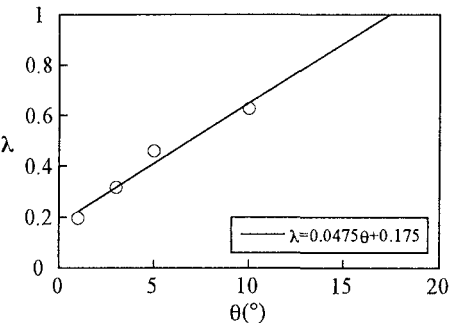


図3 λ と θ との関係

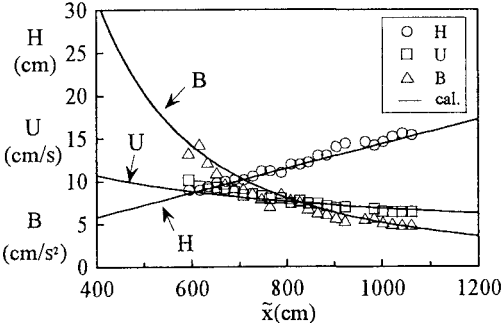


図4 数値解と実験値との比較結果の一例