

高次精度有限差分法による乱流の直接数値シミュレーション

熊本県 正会員 林俊一郎, 熊本大学 正会員 大本照恵, 矢北孝一, 学生員 平川隆一

1.はじめに

カオスの発見により時空間的に不規則な振舞いを示す多くの物理系が, 決定論的な方程式に従っていることが明らかとなった. このことは, Navier-Stokes方程式を正確に計算すれば, 現象を定量的に再現することが可能なことを意味しており, 最近では乱流を数値解析で捕らえようとする試みが活発に行われている. その中で最も信頼されているものは直接数値計算 (Direct Numerical Simulation) である. DNSはこれまでスペクトル法で行われることが多かったが, 近年, 複雑流れ場への適用性から, レギュラー格子を用いた差分法による解析が見られるようになってきた¹⁾. しかし, 乱流計算の検証問題としてよく知られる平行平板流れを対象に, 非定常項, 対流項等の差分スキームの違いが流れ場へ与える影響について検討を行った例はあまり見られないことから, 本研究では差分スキームの影響を定量的に把握することを目的とした.

2.時間進行法の選択

非線形項である対流項の離散化には特別な配慮を施さないと安定な解が得られないことはよく知られる. この不安定さを除去する手法として風上差分スキームがある. ここでは風上差分と時間進行法との組み合わせが解へ与える影響について, 以下の一次元線形対流問題²⁾を対象に検討する.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (U = 1)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(2x - \pi)}{2}, & (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

上式は滑らかな関数であるが, 偶数階の微分が $\pi/2$, $3\pi/2$ において不連続となることから, 振幅誤差, 位相誤差に加え, 偶数階微分型の数値粘性の適切性を調べることができる. 解析には x 方向に周期境界条件を適用し, m 周期後の数値解と厳密解との比較を行う. 比較した対流項差分は 3 種類 (1 次, 3 次, 5 次風上), 時間進行は 2 種類 (2 次, 3 次 Adams-Bashforth 法) とする.

図 1 はクーラン数 $1/5$ の時の波形ピークの減衰状況を示したものである. これから時間進行精度にかかわらず, 低次風上ほど減衰が著しく散逸が大きいことが分かる. 最も減衰が少ない 5 次風上は, 2 次および 3 次 Adams-Bashforth 法のどちらも振幅誤差が小さくほとんど差もないように見える. しかし, 図 2 から分かるように 2 次 Adams-Bashforth 法は, 位相誤差に加え偶数階微分不連続点で負値を示す. さらに同図からはクーラン数依存が認められるなど, その適用には注意が必要である.

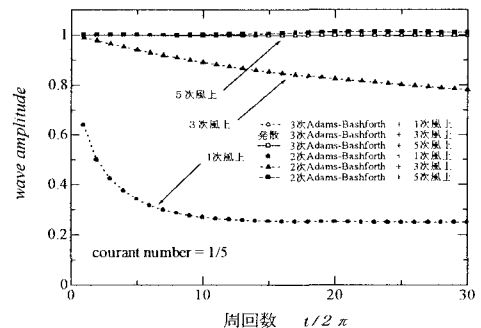
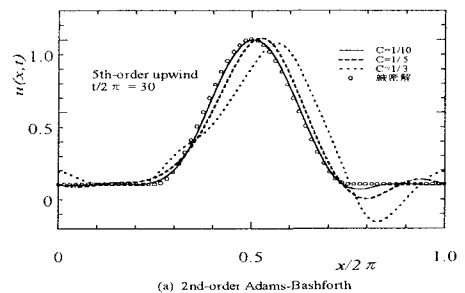
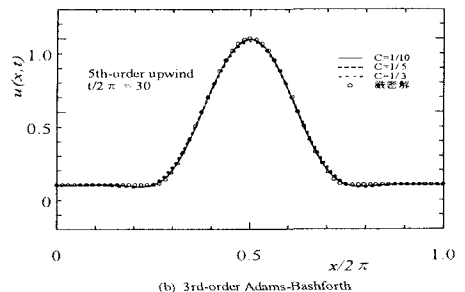


図 1 波高の減衰状況



(a) 2nd-order Adams-Bashforth



(b) 3rd-order Adams-Bashforth

図 2 30 周期後の分布

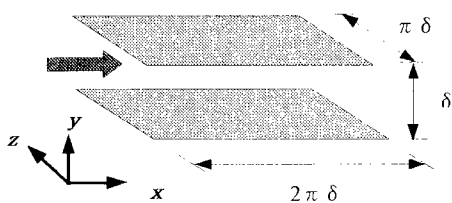


図3 計算対象

一方、3次精度 Adams-Bashforth 法は、振幅・位相誤差のみならず偶数階微分不連続点でのズレもなく、極めて良い一致を示している。このことから偶数階微分型の打ち切り誤差を持つ風上差分には、3次精度 Adams-Bashforth 法を組み合わせるものとする。

3. 数値解析法

支配方程式は、連続の式と Navier-Stokes 方程式とし、MAC 法と部分段階法³⁾を組み合わせた以下の時間進行法によって解析を行う。

$$\frac{\tilde{U} - U^n}{\Delta t} = \frac{1}{12} (23H^n - 16H^{n-1} + 5H^{n-2}) + \frac{1}{2\text{Re}} \nabla^2 (\tilde{U} + U^n)$$

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\text{div } \tilde{U}}{\Delta t}$$

$$\frac{U^{n+1} - \tilde{U}}{\Delta t} = -\text{grad } p^{n+1}$$

ここで H は対流項とし、以下の3次および5次精度風上差分スキーム⁴⁾を用いる。なお、その他の計算条件については表1のとおりとする。

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{-u_{i+2} + 8(u_{i+1} - u_{i-1}) + u_{i-2}}{12\Delta x} + |u_i| \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{12\Delta x}$$

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+3} - 9u_{i+2} + 45(u_{i+1} - u_{i-1}) + 9u_{i-2} - u_{i-3}}{60\Delta x} + |u_i| \frac{-u_{i+3} + 6u_{i+2} - 15u_{i+1} + 20u_i - 15u_{i-1} + 6u_{i-2} - u_{i-3}}{60\Delta x}$$

表1 計算条件

Coupling algorithm	Fractional Step Method
Time marching	3rd Adams-Bashforth
Spatial scheme	2nd Central (Convective)
	3rd Upwind (")
	5th Upwind (")
	2nd Central (Viscous)
Grid numbers	64 × 65 × 64 (Regular)
Spatial resolution	Δx = 18
	Δy = 0.45 ~ 13.9
	Δz = 9
Reynolds number	Re _c = 3300, Re _z = 180
Time step	Δt = 2/1000

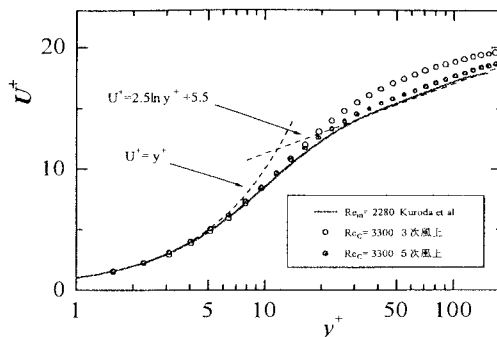


図4 平均速度分布

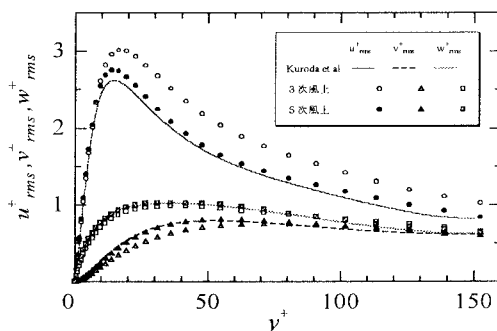


図5 乱れ強さ分布

4. 計算結果と考察

計算対象は図3に示す平行平板流れとする。境界条件は上下面がノースリップ、流下方向とスパン方向は周期境界とし、平均圧力勾配により駆動されるものとする。

図4, 5は平均速度分布、乱れ強さの結果をスペクトル法⁵⁾と比較したものである。粘性底層内の平均速度はスペクトル法とよく一致しているが、バッファ層付近から差分精度の違いが顕著となり、5次風上がスペクトル法を僅かに上回るのに対し、3次風上は大きく上回るなど数値粘性による解の鈍化が示唆される。

乱れ強さについては、3次風上が u_{rms}^+ を過大に v_{rms}^+ を過小に評価するなど再配分に問題があるのに対し、5次風上では u_{rms}^+ のピーク値に不一致が見られるものの、スペクトル法の約1/6の格子点数であることを考慮すれば良好な結果を与えているものと思われる。

参考文献

- 1) 松崎・本田他：機論 64-627(1998).
- 2) 梶島：機論 60-578(1994).
- 3) J.Kim & P.Moin：J.Comput.Phys.56(1985).
- 4) M.Rai & P.Moin：J.Comput.Phys.96(1991).
- 5) 笠木：平成3年度科研費報告書(1992).