

TVD スキームのダム破壊流れへの適用性について

九州工業大学工学部 学生員 ○重枝 未玲

同 上 正 員 秋山 壽一郎、浦 勝

1. はじめに

有効な避難計画を立案するためには氾濫流の到達時間を正確に予測する必要がある。従って、避難対策の策定に不可欠な氾濫シミュレーションモデルは必然的に高解像度であることが要求される。本研究は、高精度氾濫シミュレーションモデルの基礎モデルとなり得るような高精度の平面2次元洪水流数値モデルとして TVD-Lax-Wendroff 法と TVD-MacCormack 法に基づく数値モデルを構築し、それらを計算条件の厳しいダム破壊流れに適用し、その性能について検討を加えたものである。

2. 数値モデル

(1) 基礎方程式：基礎方程式としては、式(1)で表わされる2次元浅水流方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{S}_x + \mathbf{S}_y = \mathbf{0} \quad (1) \quad \text{ここに、} \mathbf{U} = (h, uh, vh)^T; \mathbf{E} = \left(uh, u^2h + \frac{1}{2}gh^2, uvh \right)^T$$

$$\mathbf{F} = \left(vh, uvh, v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \right)^T; \mathbf{S}_x = (0, -gh(S_{ox} - S_{fx}), 0)^T; \mathbf{S}_y = (0, 0, -gh(S_{oy} - S_{fy}))^T \quad (2)$$

ここで、 h は水深、 g は重力加速度、また、 S_{ox} 、 S_{oy} は水路床勾配で式(3)、 S_{fx} 、 S_{fy} は摩擦勾配で式(4)で表わされる。また、 n は manning の粗度係数である。

$$S_{ox} = -\frac{\partial z_b}{\partial x}; S_{oy} = -\frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (3); \quad S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}; S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (4)$$

(2) TVD スキーム：今回用いた TVD スキームである TVD-Lax-Wendroff 法と TVD-MacCormack 法を以下に示す。また、計算は時間分割法を用い局所的に1次元に分割した。これを行うことにより x 、 y 方向は同様に計算できるので、以下では x 方向についてのみ説明する。

(i) TVD-Lax-Wendroff 法：TVD-Lax-Wendroff 法は次のようになる。

$$\mathbf{U}_{i,j}^{t+1} = \mathbf{U}_{i,j}^t - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ \mathbf{E}_{i+1/2,j}^N - \mathbf{E}_{i-1/2,j}^N \} - \Delta t \mathbf{S}_{x,i,j}^t \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{E}_{i+1/2,j}^N$ は数値流束で TVD-Lax-Wendroff 法は次式で表わされる。

$$\mathbf{E}_{i+1/2,j}^N = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_{i+1,j}^t - \mathbf{E}_{i,j}^t) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \alpha_{i+1/2,j}^k \Psi(\tilde{\lambda}_{i+1/2,j}^k) \tilde{\mathbf{e}}_{i+1/2,j}^k$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \phi(r_{x,i+1/2,j}^k) \alpha_{i+1/2,j}^k \left\{ \Psi(\tilde{\lambda}_{i+1/2,j}^k) - |\tilde{\lambda}_{i+1/2,j}^k| \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_{i+1/2,j}^k| \right) \right\} \tilde{\mathbf{e}}_{i+1/2,j}^k \quad (6)$$

(ii) TVD-MacCormack 法：MacCormack 法の予測子・修正子の2段階ステップは次のようになる。

$$\text{予測子ステップ：} \mathbf{U}_{i,j}^p = \mathbf{U}_{i,j}^t - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ (1 - \theta_x) \mathbf{E}_{i+1,j}^t - (1 - 2\theta_x) \mathbf{E}_{i,j}^t - \theta_x \mathbf{E}_{i-1,j}^t \} - \Delta t \mathbf{S}_{x,i,j}^t \quad (7)$$

$$\text{修正子ステップ：} \mathbf{U}_{i,j}^c = \mathbf{U}_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ (1 - \theta_x) \mathbf{E}_{i+1,j}^p - (1 - 2\theta_x) \mathbf{E}_{i,j}^p - \theta_x \mathbf{E}_{i-1,j}^p \} - \Delta t \mathbf{S}_{x,i,j}^p \quad (8)$$

よって、MacCormack 法を TVD 化すると以下のようにになる。ここで、 $\mathbf{G}_x$ は TVD 項で式(10)で表わされる。

$$\mathbf{U}_{i,j}^{t+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{i,j}^t + \mathbf{U}_{i,j}^c) + \mathbf{G}_{x,i+1/2,j} - \mathbf{G}_{x,i-1/2,j} \quad (9)$$

$$\mathbf{G}_{x,i+1/2,j} = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{k=1}^3 \left[\alpha_{i+1/2,j}^k \Psi(\tilde{\lambda}_{i+1/2,j}^k) - \alpha_{i+1/2,j}^k |\tilde{\lambda}_{i+1/2,j}^k| \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}_{i+1/2,j}^k| \right) \right] [1 - \phi(r_{x,i+1/2,j}^k)] \tilde{\mathbf{e}}_{i+1/2,j}^k \quad (10)$$

ベクトル $\mathbf{E}$ のヤコビアン $\mathbf{A} (= \partial \mathbf{E} / \partial \mathbf{U})$ の固有値 λ と固有ベクトル $\mathbf{e}$ は以下のように表わされる。

$$\text{固有値：} \tilde{\lambda}_{i+1/2,j}^1 = u_{i+1/2,j}; \tilde{\lambda}_{i+1/2,j}^2 = u_{i+1/2,j} + c_{i+1/2,j}; \tilde{\lambda}_{i+1/2,j}^3 = u_{i+1/2,j} - c_{i+1/2,j} \quad (11)$$

$$\text{固有ベクトル：} \mathbf{e}_{i+1/2,j}^1 = (0 \ 0 \ 1)^T; \mathbf{e}_{i+1/2,j}^2 = (1 \ \tilde{\lambda}_{i+1/2,j}^2 \ v_{i+1/2,j})^T; \mathbf{e}_{i+1/2,j}^3 = (1 \ \tilde{\lambda}_{i+1/2,j}^3 \ v_{i+1/2,j})^T \quad (12)$$

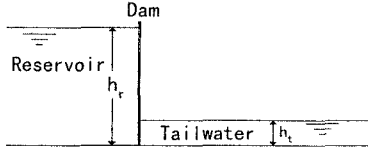


図-1 ダム破壊流れの定義図

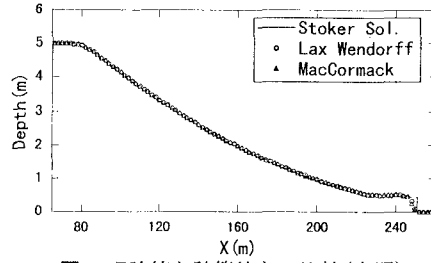


図-2 理論値と計算値との比較(水深)

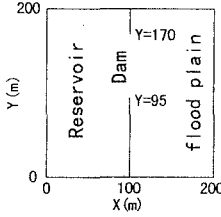


図-3 2次元部分ダム破壊流れの平面図

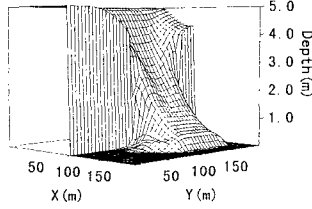


図-4a TVD Lax-Wendroff 法

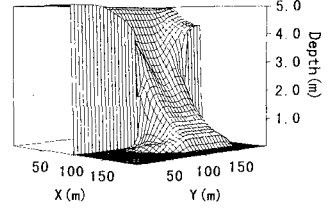


図-4b TVD-MacCormack 法

α は物理量の飛びを表し、式(13)で表わされる。

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1/2,j}^1 &= -\tilde{v}_{i+1/2,j}(h_{i+1,j} - h_{i,j}) + (v_{i+1,j}h_{i+1,j} - v_{i,j}h_{i,j}) \\ \alpha_{i+1/2,j}^2 &= -\frac{1}{2\tilde{c}_{i+1/2,j}} \{ (\tilde{u}_{i+1/2,j} - \tilde{c}_{i+1/2,j})(h_{i+1,j} - h_{i,j}) - (u_{i+1,j}h_{i+1,j} - u_{i,j}h_{i,j}) \} \\ \alpha_{i+1/2,j}^3 &= \frac{1}{2\tilde{c}_{i+1/2,j}} \{ (\tilde{u}_{i+1/2,j} + \tilde{c}_{i+1/2,j})(h_{i+1,j} - h_{i,j}) - (u_{i+1,j}h_{i+1,j} - u_{i,j}h_{i,j}) \}\end{aligned}\quad (13)$$

ここで、記号 $\sim$ は Roe の平均を用いて求められる値である。 Ψ は非物理的な解を避けるためのエントロピー補正量である。ここで、制限関数として van Leer Limiter を用いた。

3. 計算結果

本研究では、両モデルの性能を確かめるために図-1 に示すような 1 次元ダム破壊流れに関する Stoker の理論解との比較を行った。その結果、図-2 に示すように計算可能でかつ十分な精度を持つ計算結果が得られる上下流水深比($=h_r/h_t$)は 0.002 であることが分かった。その後、同じ上下流水深比で 2 次元ダム破壊流れのシミュレーションを行った。ただし、本研究では、水路床勾配 S_0 と摩擦勾配 S_f はいずれも 0 としている。計算条件は、クーラン数 $C=0.8$ 、格子間隔 $\Delta x = \Delta y = 2\text{m}$ 、Reservoir 水深 $h_r=5\text{m}$ 、 $h_r/h_t=0.002$ であり、ダム破壊から 10 秒後の計算結果である。図-2 より、TVD-Lax-Wendroff 法と TVD-MacCormack 法との計算結果には、大きな差は認められないことがわかる。

2 次元部分ダム破壊流れの概要を図-3 に示す。格子間隔 $\Delta x = \Delta y = 5\text{m}$ である以外、計算条件は 1 次元のものと同様である。ダム破壊から 7.2 秒後の TVD-Lax-Wendroff 法と TVD-MacCormack 法による計算結果をそれぞれ図-4a, b に示す。これらより、2 次元の場合においてもいずれの計算法も安定しており、両計算結果の間には大きな差は認められないことがわかる。

4. 結論

本研究では、氾濫シミュレーションモデルのベースとなり得るような TVD スキームとして、TVD-Lax-Wendroff 法と TVD-MacCormack 法を条件の厳しいダム破壊流れに適用することにより、それらの性能について検討をおこなった。その結果、両数値モデルが適正な計算精度を有する上下流水深比の限界値が 0.002 であること、両計算結果の間には大きな差は認められないことがわかった。今後の課題として、水路床勾配や摩擦勾配、氾濫シミュレーション特有の家屋などによる外力項などがどのような影響を及ぼすかについてを調べる必要がある。