

ライズを持つ長方形板の多自由度系としての非線形振動特性の解析

長崎大学大学院 学生会員 ○三堂 聡
 長崎大学工学部 フェロー会員 高橋 和雄
 長崎大学工学部 学生会員 佐藤 規裕

1. まえがき

薄板にライズを持たせると曲率構造となるため、剛性が高まり構造上有利である。しかし、飛び移り座屈を含めた不安定現象が生じやすく、ライズの大きさが座屈強度に敏感に影響を及ぼすことが知られている。ライズによって生じる運動方程式内の2次の非線形項が座屈特性に重要な役割を果たし、動的荷重が作用する場合には、動座屈や振動の問題が生じてくる。変形に対して幾何学的非線形性を示すため動力学的特性を説明するためには、非線形振動特性を明らかにしなければならない。薄板は連続体であるため、本研究では、前報¹⁾のライズを持つ長方形板の1自由度系としての解析を発展させて、多自由度系²⁾として取り扱う。解析の手順として、ライズを持つ長方形板の運動方程式を、Galerkin法を用いて多自由度系に近似し、さらに調和バランス法を用いて連立非線形方程式に変換し、Newton-Raphson法により解析する。数値解析において高次モードの非線形自由振動および高次モードの影響を考慮した非線形強制振動を明らかにする。

2. 解法

図-1のような、初期形状 w_0 を持つ長方形板の振動によって起こるたわみを w とする。ライズを持つ長方形板の運動方程式と適合条件式はMarguerreの式を用いる。板の境界条件は、曲げに対して全周単純支持とし、面内変位 u , v は固定とする。

運動方程式の解を、境界条件を考慮して式(1)のように多自由度系に仮定する。また、初期形状も境界条件を満足しなければならないため、式(2)のように仮定する。

$$w = d \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (1)$$

$$w_0 = e_0 d \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad (2)$$

ここに、 $T_{mn}(t)$ ：未知の時間関数、 e_0 ：ライズ比、 d ：板厚。

解析の手順として、Marguerreの式の適合条件式より、応力関数 F を式(1)、(2)を用いて解き、面内方向の境界条件の下に決定する¹⁾。

運動方程式に、たわみの仮定および応力関数を代入してGalerkin法を適用する¹⁾。本研究では、1次モードと1個の高次モードを選ぶ。この場合、次のような時間に関する非線形連立運動方程式が得られる。

$$\ddot{T}_{11} + 2h\dot{T}_{11} + (1 + ae_0^2)T_{11} + be_0T_{11}^2 + ce_0T_{ij}^2 + dT_{11}^3 + eT_{11}T_{ij}^2 = fp \cos \omega \tau \quad (3)$$

$$\ddot{T}_{ij} + 2h_{ij}\dot{T}_{ij} + (a' + b'e_0^2)T_{ij} + c'e_0T_{11}T_{ij} + d'T_{ij}^3 + T_{11}^2T_{ij} = \delta_{ij}f'p \cos \omega \tau \quad (4)$$

ここに、 $a, b, c, d, e, f, a', b', c', d', e', f'$ ：係数、 δ_{ij} ：Kroneckerのデルタ関数、 h, h_{ij} ：減衰定数、

$\omega = \Omega/\omega_{11}$ ：無次元加振円振動数、 $p = P_0 b^4 / D_d$ ：荷重強度、 Ω ：励振円振動数、 $\tau = \omega_{11} t$ ：無次元時間、

$(i, j) = (1, 2), (2, 1), (2, 2), \dots$

上式(3)、(4)の解を次式のように仮定する。

$$T_{11} = c_0^{11} + c_1^{11} \cos \omega \tau + s_1^{11} \sin \omega \tau + c_{1/2}^{11} \cos \frac{\omega}{2} \tau + s_{1/2}^{11} \sin \frac{\omega}{2} \tau \quad (5)$$

$$T_{ij} = c_0^{ij} + c_1^{ij} \cos \omega \tau + s_1^{ij} \sin \omega \tau \quad (6)$$

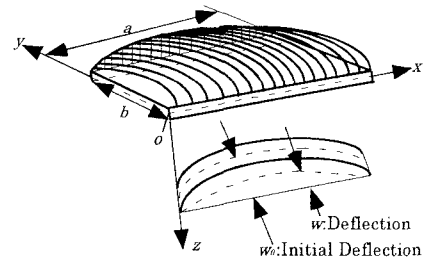


図-1 ライズを持つ長方形板の一般形状および座標系

ここに、 $c_0^{II}, c_1^{II}, s_1^{II}, c_{1/2}^{II}, s_{1/2}^{II}$: 1次モードの振幅成分、

$c_0^{ij}, c_1^{ij}, s_1^{ij}$: 高次モードの振幅成分。

上式(5)、(6)を、時間に関する非線形運動方程式(3)、(4)に代入して調和バランス法を適用すると、連立非線形代数方程式が得られる。これに、Newton-Raphson法を適用して解けば、解が得られる。

3. 解析結果

ポアソン比 $\nu=0.3$ 、縦横比 $\mu=1$ の正方形板を数値計算の対象とする。

(1) 非線形自由振動 図-2は1次モード T_{11} 、図-3は2次モード T_{12}, T_{21} 、3次モード T_{22} および4次モード T_{33} のライズ比 $e_0=0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ の非線形自由振動曲線を示している。縦軸は振幅の変動成分 $c_1^{II}, c_1^{I2}, c_1^{I2}, c_1^{22}, c_1^{33}$ 、横軸は無次元振動数 ω を取っている。図-2の1次モードの非線形自由振動では、ライズ比 $e_0=0$ の場合、振動数は振幅 c_1^{II} の増大とともに単調に増加するのみであるが、ライズ比が板厚程度になるとライズ比の影響によって軟化バネの特性を示す。振幅がライズ比よりも大きくなると再び硬化バネの特性を示す。図-3の2次、3次および4次モードの非線形自由振動では、硬化バネの特性のみが現れている。1次モードではライズ比の影響が大きい、2次、3次および4次モードではライズ比の影響が小さい。運動方程式内の2次の非線形項の単独項が入っていないためと考えられる。

(2) 非線形強制振動 図-4はライズ比 $e_0=-1$ 、荷重強度 $p=175$ の1次モードの応答曲線を示している。縦軸は振幅成分、横軸は無次元加振振動数 ω をとっている。また荷重強度のは、無次元加振振動数 $\omega=0$ のとき、主共振の振幅 $c_1^{II}=0.2$ となるように取っている。固有振動数 $\omega=1.9$ 付近に生じる主共振 c_1^{II} に加え、固有振動数の2倍 $\omega=3.8$ 付近に $1/2$ 分数調波共振 $c_{1/2}^{II}, s_{1/2}^{II}$ が現れ、軟化・硬化バネの特性が現れている。また、図-4には、Runge-Kutta-Gill法による数値シミュレーション結果が○印でプロットされている。解析解とシミュレーションとの結果はほぼ一致し、解析の精度は十分であるといえる。図-5はライズ比 $e_0=-1$ 、荷重強度 $p=300$ の強制振動を示している。1次モードの主共振 c_1^{II} 、 $1/2$ 分数調波共振 $c_{1/2}^{II}, s_{1/2}^{II}$ および4次モードの応答振幅 c_4^{33} が現れている。無次元応答振幅 c_1^{33} には、硬化バネの特性が現れている。

4. まとめ

本研究では、全周辺単純支持の場合を解析したが、さらに、全周辺固定の場合を解析する予定である。

参考文献

- (1) 高橋・三堂：長崎大学工学部研究報告，Vol.28，No.51，pp.199~206，1998.10.
- (2) 高橋・河原・山辺：土木学会論文報告集，第293号，pp.9~22，1980.1.

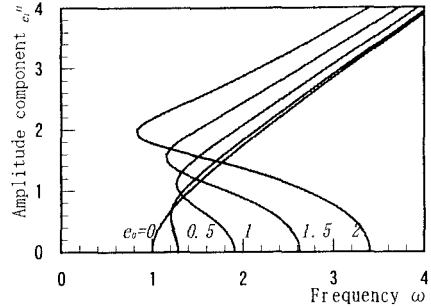


図-2 1次モードの非線形自由振動曲線

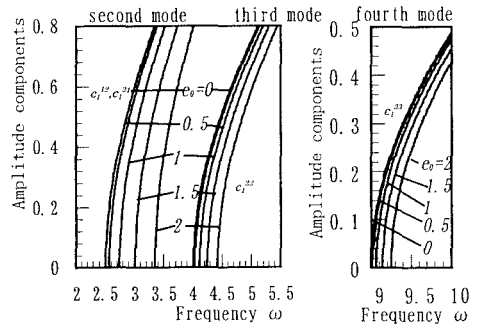


図-3 2次、3次、4次モード

の非線形自由振動曲線

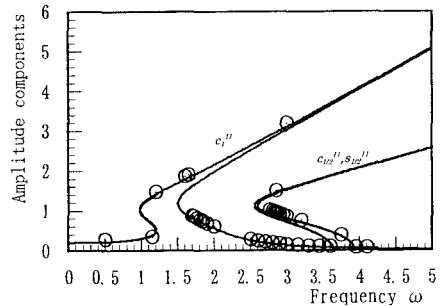


図-4 応答曲線 ($e_0=-1, h=0, p=175$)

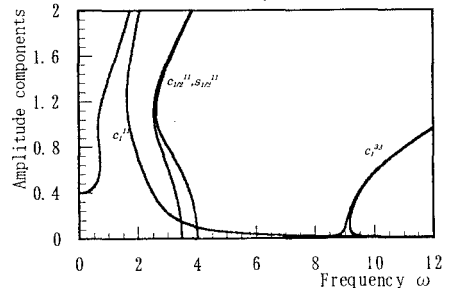


図-5 応答曲線 ($e_0=-1, h=0, p=300$)