

二段階制御法を用いたケーブルの動的解析

熊本工業大学 学生員 ○橋本 祐己
 熊本工業大学 正員 三池 亮次
 熊本大学 正員 小林 一郎
 八代高専 正員 橋本 淳也

1 はじめに

浮体の繫留や吊橋、斜張橋のような橋梁の主要部材として利用されているケーブルは、それ自体は不安定な構造であるので外力を受けて大変形した後の状態を推定することは困難な問題である。このため、多くの研究者によりケーブルの構造解析法が提案されている。

筆者らは、ケーブルを折線ケーブルとして大変形構造解析の基礎式に基づき、不安定次数分だけある節点方向に制御変位を用いることにより、静定構造として構造解析を行い、同時に制御変位方向の反力を求める。しかる後に制御変位方向の与えられた外力と反力の差、すなわち、不釣り合い力を0とするように新たに制御変位を定めて第2段の変位制御法による解析を行う、二段階制御大変形構造解析法提案した。また、運動するケーブルに対して、加速度項を慣性力と表すことによって運動を解析する手法を提案した。

ここでは、このケーブルの運動解析の手法について、折線ケーブルをより実際ケーブルの状態に近づけるため折線の分割を多くしたり、ケーブルが運動中、直線状に緊張する場合等を対象として解析の条件範囲を研究する。

2 大変形基礎式

ケーブルの変形を、変形前の状態、変形の間状態、変形後の3段階に分割する。中間状態からの荷重と変位の増分 ΔP と Δd の間には、

$$\Delta P = K \Delta d + b \quad (1)$$

$$K_E = (C' + \Delta C) K_m (C' + \Delta C)^T, b = -(C' + \Delta C) K_m \Delta e_{m\theta} + \Delta C p'_m$$

ここに、 K_E は剛性マトリックス、 C は接続マトリックス、 ΔC はその増分、 p_m は軸方向力ベクトル、 $\Delta e_{m\theta}$ は部材の回転に関するベクトル、 K_m は部材剛性マトリックスで、バネ定数 $k = EA/L$ を対角要素とする対角マトリックスである。添字' (プライム) は中間状態を表す。また上式を変位 $\Delta d = [\Delta d_1, \Delta d_2, \dots]^T$ で微分すると、

$$\delta \Delta p = [K'_E + K'_G] \delta \Delta d \quad (2)$$

$$= K'_T \delta \Delta d \quad (3)$$

ここに、 K'_T は接線剛性マトリックスで $K'_T = K'_E + K'_G$ である。また、 K'_E は弾性剛性マトリックス、 K'_G は幾何剛性マトリックスで次式のように表される。添字' は変形の中間状態における値を示す。

3 ケーブルの運動方程式の数値計算

ケーブルの増分形運動方程式は、(1) 式において (-(質量 × 加速度)) を慣性力と考えて、これを外力として左辺に組み込むことによって得られる。計算の第 $I+1$ ステップの加速度ベクトルの増分 Δa_{I+1} は第 I ステップにおける変位の増分を $\Delta \bar{d}_I$ とすると、

$$\begin{aligned} \Delta a_{I+1} &= \left\{ \left(\frac{\Delta \bar{d}_{I+1}}{\Delta t} - \frac{\Delta \bar{d}_I}{\Delta t} \right) - \left(\frac{\Delta \bar{d}_I}{\Delta t} - \frac{\Delta \bar{d}_{I-1}}{\Delta t} \right) \right\} \frac{1}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t^2} (\Delta \bar{d}_{I+1} - 2\Delta \bar{d}_I + \Delta \bar{d}_{I-1}) \end{aligned} \quad (4)$$

また簡単のために、質量は折線ケーブルの節点に集中、質量マトリックスを M として、第 I ステップにおける荷重増分を ΔP_I とすると、運動方程式は(4) 式を(1) 式に用い、次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(M \frac{1}{\Delta t^2} + K_{I+1} \right) \Delta \bar{d}_{I+1} + b_{I+1} &= \Delta \bar{P}_{I+1} + M(2\Delta \bar{d}_I - \Delta \bar{d}_{I-1})/\Delta t^2 \\ &\equiv \Delta \bar{f}_{I+1} \end{aligned} \quad (5)$$

(7)式の $\mathbf{K}_{I+1}, \mathbf{b}_{I+1}$ は $I+1$ ステップにおける変位増分 $\Delta \mathbf{d}_{I+1}$ の関数であるので、これを $\Delta \mathbf{d}_{I+1}$ に関して Taylor 展開すると、接線剛性マトリックス $\mathbf{K}_T$ を用い、

$$\left(\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t^2} + \mathbf{K}_{T,I+1} \right) \delta \Delta \mathbf{d}_{I+1} = \delta \Delta \mathbf{f}_{I+1} \quad (6)$$

これより、第 $I+1$ ステップの最初の iteration の増分変位は、

$$\Delta \mathbf{d}_{I+1}^{(0)} = \left(\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t^2} + \mathbf{K}_{T,I+1}^{(0)} \right)^{-1} \bar{\Delta} \mathbf{f}_{I+1} \equiv \mathbf{K}_{I+1,PT}^{-1} \bar{\Delta} \mathbf{f}_{I+1} \quad (7)$$

とする。 $\Delta \mathbf{d}_{I+1}^{(0)}$ に対応する $\Delta \mathbf{f}_{I+1}^{(1)}$ は (1) 式に従い、

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f}_{I+1}^{(1)} &= \left(\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t^2} + \mathbf{K}_{I+1}^{(0)} \right) \Delta \mathbf{d}_{I+1}^{(0)} + \mathbf{b}_{I+1}^{(0)} \\ &= \mathbf{M} \frac{1}{\Delta t^2} \Delta \mathbf{d}_{I+1}^{(0)} + \Delta \mathbf{P}_{I+1}^{(1)} \\ \Delta \mathbf{P}_{I+1}^{(1)} &= \mathbf{K}_{I+1}^{(0)} \Delta \mathbf{d}_{I+1}^{(0)} + \Delta \mathbf{b}_{I+1}^{(0)} \end{aligned} \quad (8)$$

したがって、次の iteration における増分 $\mathbf{f}$ 値は、

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f}_{I+1}^{(1)} &= \bar{\Delta} \mathbf{f}_{I+1} - \Delta \mathbf{f}_{I+1}^{(1)} \\ &= \mathbf{M} \frac{1}{\Delta t^2} (\bar{\mathbf{d}}_{I+1} - \Delta \mathbf{d}_{I+1}^{(0)}) + (\bar{\Delta} \mathbf{P}_{I+1} - \Delta \mathbf{P}_{I+1}^{(1)}) \\ &= \mathbf{M} \frac{1}{\Delta t^2} \Delta \mathbf{d}_{I+1}^{(1)} + \Delta \mathbf{P}_{I+1}^{(1)} \end{aligned} \quad (9)$$

したがって

$$\delta \mathbf{f}_{I+1}^{(1)} = \mathbf{M} \frac{1}{\Delta t^2} \delta \Delta \mathbf{d}_{I+1}^{(1)} + \delta \mathbf{P}_{I+1}^{(1)} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{d}_{I+1}^{(1)} &= \left(\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t^2} + \mathbf{K}_{T,I+1}^{(1)} \right)^{-1} \Delta \mathbf{f}_{I+1}^{(1)} \\ &\equiv \mathbf{K}_{FT,I+1}^{(1)-1} \Delta \mathbf{f}_{I+1}^{(1)} \end{aligned} \quad (11)$$

$\mathbf{K}_{FT,I+1}^{(1)}$ は、慣性力を考慮した接線剛性マトリックスで (7)、(11) 式からわかるように $\mathbf{K}_{T,I+1}^{(1)}$ と $\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t^2}$ の和である。

以下同様、イテレーションを繰り返す。上記は静止ケーブルのつり合い式計算における荷重項 $\Delta \mathbf{P}_{I+1}$ の代わりに $\Delta \mathbf{f}_{I+1}$ を、 $\mathbf{K}_T$ の代わりに $\mathbf{K}_{FT}$ を用いた荷重分割法となるが、これを制御変位節点と自由変位節点の2群に分けて二段階制御法を適用し、運動ケーブルの数値計算を進める。

4 解析例

図-3のような、12部材折線ケーブルの自由節点の鉛直方向すべてに外荷重 9.8 kgf を与え、移動節点に強制変位を鉛直方向、水平方向に与えた時のケーブルの挙動解析を行い、6部材折線ケーブルとの比較を検討した。図-4は、12部材折線ケーブルと、6部材折線ケーブルの1部材目の軸力の推移図を表したものである。

また、ケーブルが直線状に緊張する場合の解析も行う。

詳細は講演時に述べる。

参考文献

- 1) 後藤茂夫他, 非線形有限変形法によるトラスの大変形解析とその応用プログラム, 土木学会論文報告集, 194号, pp.55-69, 1971.
- 2) Miike, R., Kobayashi, I., and Yamada, Z., Virtual Large Displacement Theorem for Framed Structures, EM10, ASCE, pp. 441-428, Feb. 1990
- 3) 三池亮次, 橋本淳也, 東高德, 小林一郎, 修正二段階制御法による不安定なケーブル構造解析, 応用力学論文集, Vol.1

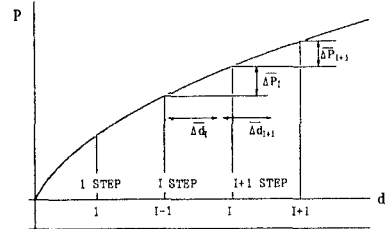


図-1 第 $I, I+1$ ステップにおける荷重と変位の関係図

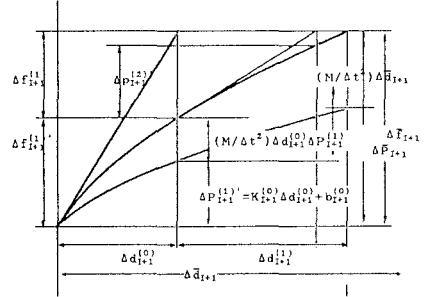


図-2 ニュートン・ラフソン法によるケーブルの運動数値解析図

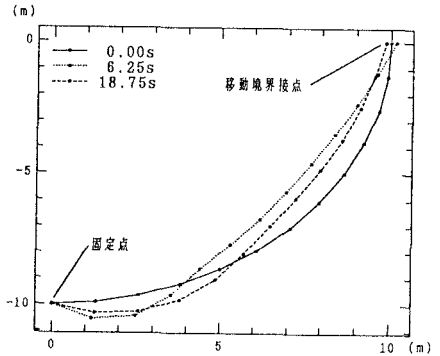


図-3 12部材折線ケーブルの変形図

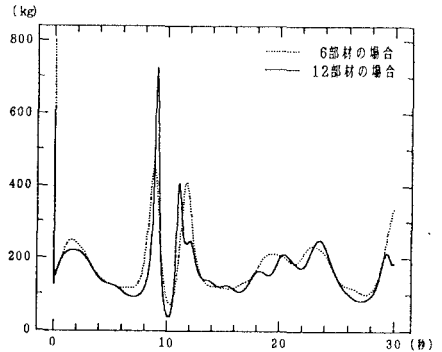


図-4 固定点と隣接する部材における軸力の変化