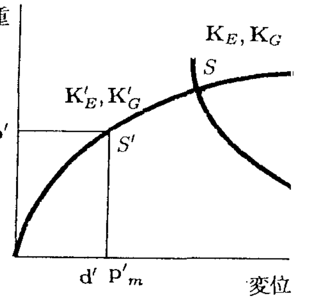
接続マトリックスを用いた中間荷重作用の骨組構造解析

熊本工業大学　学生員　宮元　謙次
同上　正員　三池　亮次
八代工業高等専門学校　正員　橋本　淳也
熊本大学　正員　小林　一郎

1　はじめに

骨組構造が有限変位を行った後に分岐座屈を行う場合の座屈固有値解析の一つの解法を提起するものである。この座屈点は、特異点となるために数値解析を実行する上において、多くの困難を伴い、古くから多くの研究者の注目を浴びている。その多くは座屈点において接線剛性マトリックス$\mathbf{K}_T$の行列式$|\mathbf{K}_T|=0$となる点を追求するものである。ここでは、制御変位法による有限変位解析を行い、座屈近傍点で座屈増分荷重$\Delta\lambda$が0となるように座屈点に接近する非線型座屈解析を行う。



図－1荷重－変位曲線における分岐座屈点S

2　有限変位解析

筆者らがLagrange-Euler併用形、有限変位仮想仕事の原理に従って先に誘導した有限変位構造解析の基礎式に基づいて解析を進める。点S'において荷重変位が$\mathbf{p}', \mathbf{d}'$であり、それからの荷重変位増分が$\Delta\mathbf{p}, \Delta\mathbf{d}$であったとすると

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{d} + \mathbf{b} \tag{1}$$

ここに剛成マトリックス$\mathbf{K}$と$\mathbf{b}$は、それぞれ

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{K} &= (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})^T \\ \mathbf{b} &= \Delta\mathbf{C}\mathbf{p}'_m - (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{e}_{m\theta} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

であり、S'における接続マトリックスを$\mathbf{C}'$、その増分を$\Delta\mathbf{C}'$とする。

軸力しか生じない,または軸方向の伸縮しか生じない理想的なピン結合トラスを対象としてこの解法を検討してみる。上式の部材剛性マトリックス$\mathbf{K}_m$はバネ定数$k = \frac{EA_I}{L_{I,0}}$を要素とする対角マトリックスとなる。Eはヤング率、A_Iは第I部材の断面積、$L_{I,0}$は初期部材長でバネ定数は初期部材長$L_{I,0}$によってのみ定まり、部材長に関わらず一定とする。$\mathbf{p}'_m$は、S'点における部材断面力（軸力）ベクトルである。（1）式を増分変位$\Delta\mathbf{d} = \{\Delta d_i\}$で微分すれば

$$\delta\Delta\mathbf{p} = (\mathbf{K}'_E + \mathbf{K}'_G)\delta\Delta\mathbf{d} = \mathbf{K}'_T\delta\Delta\mathbf{d} \tag{3}$$

ここに$\mathbf{K}'_E, \mathbf{K}'_G$は、$S'$点における弾性剛性マトリックス、幾何剛性マトリックスであり、

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{K}_E = \mathbf{C}'\mathbf{K}_m\mathbf{C}'^T \\ \mathbf{K}_G = \left[\frac{\partial(\mathbf{C}+\Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d}\right]_{\Delta\mathbf{d}=0}、\quad &\mathbf{p}'_m \equiv \left[\frac{\partial(\mathbf{C}+\Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d_1}\mathbf{p}'_m \ \frac{\partial(\mathbf{C}+\Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d_2}\mathbf{p}'_m \ \cdots\right] \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

である。上式の$\left[\frac{\partial\mathbf{C}+\Delta\mathbf{C}}{\partial\Delta d}\right]$は、立体マトリックスをあらわしている。トラスの$\mathbf{K}_G$が部材の方向余弦ベクトルを用い簡潔に表せることについては既に発表の通りである。

3　非線型座屈特異点

S'点において構造物は、荷重$\mathbf{p}'$を受け変位$\mathbf{d}'$と軸方向力$\mathbf{p}'_m$を生じ釣り合っているものとする。これまでの荷重-変位曲線は変位制御法によって得られたものとする。このS'の状態において構造物が更に荷重増分を受けるものとする。

このときこの増分荷重に伴う変位$\Delta \mathbf{d}'$が微少で、構造物の形状にほとんど変化がないと仮想する。その状態における軸方向力は$\mathbf{p}_m = \mathbf{p}'_m + \Delta \mathbf{p}_m$のみが、大きく変わり荷重-変位における特異点に達するものとする。たとえば、分岐特異点であれば$\mathbf{d}$に対し$\mathbf{p}$は２価関数であるから、S点において、そのとき

$$(\mathbf{K}'_E + \mathbf{K}"_G)\delta\Delta\mathbf{d} = 0 \tag{5}$$

ここに

$$\mathbf{K}"_G = \left[\frac{\partial(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d}\right]_{\Delta\mathbf{d}=0}(\mathbf{p}'_m + \Delta\mathbf{p}_m) \tag{6}$$

となる。形状の変化は無視されるので（３）式において、$\mathbf{p}'_m$が$\mathbf{p}_m = \mathbf{p}'_m + \Delta\mathbf{p}_m$に、変わるだけである。

$$\{(\mathbf{K}'_E + \left[\frac{\partial(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d}\right]_{\Delta\mathbf{d}=0}\mathbf{p}'_m) + \left[\frac{\partial(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d}\right]_{\Delta\mathbf{d}=0}\Delta\mathbf{p}_m\}\delta\Delta\mathbf{d} = \mathbf{0} \tag{7}$$

式（1）を用い

$$\Delta\mathbf{p}_m = \mathbf{K}_m(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})^T\Delta\mathbf{d} - \mathbf{K}_m\Delta\mathbf{e}_{m\theta} \tag{8}$$

$$= \mathbf{K}_m\mathbf{C}^T\mathbf{K}_E^{-1}(\Delta\mathbf{p} - \mathbf{b}) - \mathbf{K}_m\Delta\mathbf{e}_{m\theta} \tag{9}$$

また、$\Delta\mathbf{p} = \Delta\lambda\mathbf{p}_o$とすると変位が微少であれば、

$$\Delta\mathbf{p}_m = \Delta\lambda\mathbf{D}\mathbf{p}_o - \mathbf{D}\mathbf{b} - \mathbf{K}_m\Delta\mathbf{e}_{m\theta} \fallingdotseq \Delta\lambda\mathbf{D}\mathbf{p}_o$$

上式を（７）式に用い、次式

$$(\mathbf{A} + \Delta\lambda\mathbf{B})\delta\Delta\mathbf{d} = \mathbf{0} \tag{10}$$

を得る。ここに$\mathbf{A} = \mathbf{K}'_E + \left[\frac{\partial(\mathbf{C}'+\Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d}\right]_{\Delta\mathbf{d}=0}\mathbf{p}'_m, \mathbf{B} = \left[\frac{\partial(\mathbf{C}'+\Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d}\right]_{\Delta\mathbf{d}=0}\mathbf{D}\mathbf{p}_o$
（１０）式に基づいて、固有値$\Delta\lambda$を求めることができる。
もし、この$\Delta\lambda$が大きいときS'点において構造物の変位$\Delta\mathbf{d}$は、実は有限変位し大きく変位するから、$\Delta\lambda$は求める増分荷重となり得ない。このようなときには、与えられた制御変位に基づいて有限変位解析を続行するのみである。
有限変位解析が進行して、S'が真の特異点Sに接近したとき、$\Delta\mathbf{p}_m$はしたがって$\Delta\lambda$は十分に小さくなる。すなわち$\Delta\lambda$は0に、$\mathbf{K}'_E, \mathbf{K}'_G$は$S$点の$\mathbf{K}_E, \mathbf{K}_G$に近づく、このときの変位制御法で求めた荷重が座屈荷重となる。屈伏にも分岐座屈にも適用される。
数値解析を進めS'点が特異点Sに近づいたとき、$\Delta\lambda$は次第に小さくなるのはもちろんであるが解析上多くの難点が表される。
１、座屈解析にコレスキー分解を用い、$\mathbf{A}$を三角行列に分解するのであるが、特異点において対角要素の一つが0となる。もし対角要素の一つが負ならば、制御変位を1/2とし再度計算を続行する。
２、十分に特異点に近づくに従って$\Delta\lambda$の絶対値が増大することがある。この場合には特異点を超えたものとして、制御変位を半分にする等の調整を行う。
３、変位制御法において、$\mathbf{K}_E$の非制御変位に対応するの対角ブロック要素$\mathbf{K}_{E2,2}$が特異となる。この場合はそのようの点が特異点とみなし得る。
制御変位の増大とともに、この増分荷重が0に近づくことを簡単な2部材トラスと１６部材トラスで検討した。