Nestedタイプの離散－連続選択モデルの導出とその適用

熊本大学○学生員　近藤　俊一
熊本大学　学生員　竹林　秀基
熊本大学　正　員　溝上　章志

1．はじめに

1件あたりの荷主の貨物出荷行動では，輸送手段選択だけでなく輸送ロットサイズも同時に決定されており，かつ2つの選択が関連していると考えられる．このような質と量の同時選択問題のモデル化には，離散－連続選択モデルの適用が有効である．さらに，，地域間物流の輸送手段選択やロットサイズ選択には，所要時間や輸送料金が大きな影響を及ぼすことが過去の研究から明らかにされている．これらは輸送経路に依存することから，輸送経路も荷主にとっては重要な選択肢であり，離散選択モデルへの組み込みが必要と考えられる．このような問題に適用可能な離散選択モデルは，輸送手段と輸送経路の 2 つの離散選択を段階的選択構造で表すことができるNested Logitモデルである．本研究では， Nested Logitモデルを組み込んだ離散－連続モデルの定式化と，連続モデル推定の際の選択性修正項の導出[1]について述べる．さらに荷主の観測されない特性による効用関数の誤差項を両モデル間で整合させるために，新たに両モデルの同時推定方法を提案した．これらの有効性を全国貨物純流動調査データを用いて実証的に検証する．

2．Nestedタイプの離散－連続選択モデル

(1) Nestedタイプの離散－連続選択モデルの定式化

Nested タイプの離散－連続選択モデルを簡単に説明する．消費者行動理論に習って，荷主の行動は以下のように最適化問題で表現できると仮定する．

$$\max : U(x_1, x_2) \qquad (1)$$
$$s.t. \quad y = t_1 x_1 + t_2 x_2$$

ただし， x_i は各財の消費量， yは所得， t_i は各財の価格， $U(\cdot)$は消費者の直接効用関数である．このとき，荷主nにとって効用最大となる最適投入要素量x_i^*を直接効用関数に代入した間接効用関数が以下の確率項を含むY_iで定義できると仮定する．

$$Y_i = V_i(t_i, y_i, s, z_i, \eta) + \varepsilon_i \qquad (2)$$

s は決定者の特性， z_i は選択肢の特性である．また， η は荷主や品目の観測されない特性，ε_iは選択肢の観測されない特性，つまり誤差項である．

以下では選択肢の階層構造を第1レベルで輸送手段（トラック or 船舶）を選択し，第2レベルでは第1レベルで選択された輸送手段ごとの輸送経路を選択するという階層構造について定式化する．（図－1参照）いま，ε_iに同一で独立なガンベル分布を仮定すると，以下に示すNested Logit モデルによる輸送手段と経路の組み合わせ選択肢の選択確率を得ることができる．

$$p_i = \frac{\exp(V_i/\lambda_l)\cdot\alpha_l\left(\sum_{j\in B^l}\exp(V_j/\lambda_l)\right)^{\lambda_l-1}}{\sum_l \alpha_l\left(\sum_{j\in B^l}\exp(V_j/\lambda_l)\right)^{\lambda_l}} \qquad (3)$$

一方，Roy's Identity から，以下のような投入要素需要関数（＝輸送需要関数で，ここでは出荷一件当たりのロットサイズ）が得られる．

$$x_i^* = \frac{\partial Y_i(t_i, y, s, z_i, u_i)/\partial t_i}{\partial Y(t_i, y, s, z_i, u_i)/\partial y} = g_i(t_i, y, s, z_i, u_i) \qquad (4)$$

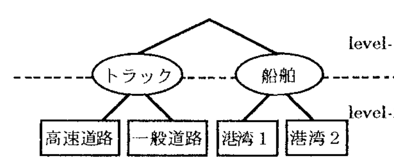
以下の実証分析では，選択肢 i を選択するという条件付き確率間接効用関数Y_iを，直接的に

$$Y_i = (\alpha_i + \beta_i t_i + \theta_i y + \phi_i z_i + \varphi s + \eta)\cdot\exp(-\theta t_i) + \varepsilon_i \qquad (5)$$

のように仮定した．このとき，輸送手段と経路の組み合わせ選択肢 i の選択確率 P_iは式（3）より，ロットサイズは

$$x_i = -\frac{1}{\theta_i}\{\beta_i - \theta(\alpha_i + \beta_i t_i + \theta_i y + \phi_i z_i + \varphi s + \eta)\} \qquad (6)$$

のように求められる．



図－1　輸送手段／輸送経路選択の選択ツリー

(2) 選択性修正項の導出

離散-連続選択モデルの推定に通常，利用される選択性修正法の選択性修正項は，選択肢 j が選択された条件下での誤差項ηの期待値であり，ロットサイズ関数を推定する際に実績需要データに生じている選択肢固有のバイアスである．ここでは選択性修正項の導出を行う．

まずε_iの条件付き期待値を求める．選択肢 i が選択されたときのε_iの条件付き期待値は以下のような式になる．

$$E(\varepsilon_i|\ \text{選択肢} i \text{ を選択}) = -\gamma - \ln \beta_i \qquad (7)$$

ここで

$$\beta_i = \exp(-V_i)\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\left(\sum_{j\in B^k}\exp(V_j/\lambda_k)\right)^{\lambda_k} \qquad (8)$$

である. 次に選択肢 j が選択されたときの ε_i の条件付き期待値を導出する. このとき, 選択肢 i は部分集合 k, 選択肢 j は部分集合 l の中に存在が, $k \neq l$ のケース(case-1)と $k = l$ のケース(case-2)の２つケースを考える必要がある. このときの ε_i の条件付き期待値は以下のようになる.

$$E(\varepsilon_i|\ \text{選択肢} j \text{ を選択}) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t \int_{t+V_j-V_i}^{\infty} F^{ij}\, ds\cdot dt}{p_j} \qquad (9)$$

ここで, 累積密度関数 F を ε_i と ε_j で偏微分した F^{ij} は以下のような式となる.

(case-1)

$$F^{ij}(s+V_i-V_1,\cdots,s,\cdots,t,\cdots,s+V_i-V_n) =$$

$$\alpha_k\left(\sum_{\substack{h\in B^k\\ h\neq j}}\exp\left(-(s+V_j-V_h)/\lambda_k\right)+\exp(-t/\lambda_k)\right)^{\lambda_k-1}$$

$$\cdot\alpha_l\left(\sum_{h\in B^l}\exp\left(-(s+V_j-V_h)/\lambda_l\right)\right)^{\lambda_l-1}$$

$$\cdot\exp\left\{-\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{M}\alpha_m\left(\sum_{i\in B^m}\exp\left(-(s+V_i-V_i)/\lambda_m\right)\right)^{\lambda_m}\right.$$

$$\left.+\alpha_k\left(\sum_{\substack{h\in B^k\\ h\neq i}}\exp\left(-(s+V_j-V_h)/\lambda_k\right)+\exp(-t/\lambda_k)\right)^{\lambda_m}\right\}$$

$$\cdot\exp(-t/\lambda_k)\cdot\exp(-s/\lambda_k) \qquad (10)$$

(case-2)

$$F^{ij}(s+V_i-V_1,\cdots,s,\cdots,t,\cdots,s+V_i-V_n) =$$

$$\left\{-\frac{\alpha_k}{\lambda_k^2-\lambda_k}\left(\sum_{\substack{h\in B^k\\ h\neq i}}\exp\left(-(s+V_i-V_h)/\lambda_k\right)+\exp(-t/\lambda_k)\right)^{\lambda_k-2}\right.$$

$$\left.+\alpha_k^2\left(\sum_{\substack{h\in B^k\\ h\neq i}}\exp\left(-(s+V_i-V_h)/\lambda_k\right)+\exp(-t/\lambda_k)\right)^{2(\lambda_k-1)}\right\}$$

$$\cdot\exp\left\{-\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{M}\alpha_m\left(\sum_{h\in B^m}\exp\left(-(s+V_j-V_h)/\lambda_m\right)\right)^{\lambda_m}\right.$$

$$\left.-\alpha_k\left(\sum_{\substack{h\in B^k\\ h\neq i}}\exp\left(-(s+V_j-V_h)/\lambda_k\right)+\exp(-t/\lambda_k)\right)^{\lambda_k}\right\} \qquad (11)$$

$$\cdot\exp(-s/\lambda_k)\cdot\exp(-t/\lambda_l)$$

選択性修正項 $E(\eta)$ は, 各選択肢が選択された場合の条件付き期待値と相関を持つと仮定すると, 選択肢 j が選ばれる条件付きの η の期待値は次のようになる.

$$E(\eta|\ \text{選択肢} j \text{ を選択})$$

$$= \left(\sqrt{2}\sigma/\lambda\right)\sum_{i=1}^{n}\rho_i\, E(\varepsilon_i|\ \text{選択肢} j \text{ を選択}) \qquad (12)$$

となる. これが Nested Logit モデルの選択性修正項である.

3. 離散－連続段階と整合的な同時推定方法

通常, 離散－連続選択モデルの推定には選択性修正法が用いられる. 選択性修正法とは, 離散選択モデルの推定には最尤推定法を, 連続選択モデルの推定には選択性修正項を導入した最小自乗法を用いた段階的推定法である. 段階的推定法では間接効用関数とロットサイズ関数とで理論上同じ値のはずのパラメータが異なる推定値になることを容認する.

ここで提案する同時推定法は, 連続モデル式（6）の η を $\eta = E[\eta] + \nu$ に分解し, ν が $N(0,\sigma^2)$ に従うという性質を用いて, 本来, 最小自乗法を用いていた連続選択モデルの推定を最尤推定法におきかえ, 離散モデルの尤度 $F_\alpha(\theta)$ と連続モデルの尤度 $F_c(\theta,t)$ の重み付き和の

$$L = \alpha F_\alpha(\theta) + (1-\alpha)F_c(\theta,t) \qquad (13)$$

最大化により, パラメータ (θ,t) と α を推定する方法である.

4. おわりに

全国貨物純流動調査データのうち, 九州発のコンテナ貨物のトラック, 船舶, 及び出荷港湾選択の推定結果については講演の際に発表する.

【参考文献】
1)Haneman,W.M.(1984) Disctrete/Continuous Model of Consumer Demand, *Econometrica* 52 (3),p.p.541-561.