空間滑動面上の応力と共軸な関係にある塑性ひずみ増分式

鹿児島大学工学部　学　金子明誉
同　上　　　　　正　三隅浩二

1．はじめに　空間滑動面上の応力パラメータ$\sigma'=\sigma_{SMP}$, $\tau=\tau_{SMP}$ (Nakai and Matsuoka, 1986) とそれぞれ共軸な関係にあるべき塑性ひずみ増分 $d\varepsilon^p \neq d\varepsilon_{SMP}^{*p}$, $d\gamma^p \neq d\gamma_{SMP}^{*p}$の定義式が，ごく普通の$\sigma_{ij}'$に関する流れ則から必然的に導かれることを示す．この定義式は粘土要素のせん断挙動の予測に役立つ．

2．エレメントの挙動の順解析モデル
式（1）は，塑性主ひずみ増分$d\varepsilon_i^p$, i=1, 2, 3を通常の流れ則で示したものである．ここに，hは硬化関数，fは降伏関数，gは塑性ポテンシャルである．

$$d\varepsilon_i^p = h\,df\,\partial g/\partial\sigma_i' \quad \cdots (1)$$

$$\partial g/\partial\sigma_i' = \partial g/\partial\sigma' \cdot \partial\sigma'/\partial\sigma_i' + \partial g/\partial\tau \cdot \partial\tau/\partial\sigma_i' \quad \cdots (2)$$

gは主応力σ_i', i=1, 2, 3の関数であるが，空間滑動面上の応力パラメータσ', τの関数でもあるので，偏微分の公式，式（2）が成立する．この式（2）を式（1）に代入すれば，式（3）を得ることができる．

$$d\varepsilon_i^p = \partial\sigma'/\partial\sigma_i' \cdot (h\,df\,\partial g/\partial\sigma') + \partial\tau/\partial\sigma_i' \cdot (h\,df\,\partial g/\partial\tau) \quad \cdots (3)$$

そこで，この式（3）を塑性仕事増分dw^pと塑性体積ひずみ増分$d\varepsilon_v^p$の式に代入し，２式を解くことにより，空間滑動面上における塑性ひずみ増分 $d\varepsilon^p = h\,df\,\partial g/\partial\sigma'$, $d\gamma^p = h\,df\,\partial g/\partial\tau$の $d\varepsilon_i^p$, i=1, 2, 3との関係を表す式，式（4）を誘導することができる．

$$d\varepsilon^p = \left\{\sigma' \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} \partial\tau/\partial\sigma_j'\right) - \tau \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} \partial\sigma'/\partial\sigma_j'\right)\right\}^{-1} \times \sum_{i=1}^{3} \left\{\left[\sigma_i' \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} \partial\tau/\partial\sigma_j'\right) - \tau\right] \cdot d\varepsilon_i^p\right\}$$

$$d\gamma^p = \left\{\sigma' \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} \partial\tau/\partial\sigma_j'\right) - \tau \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} \partial\sigma'/\partial\sigma_j'\right)\right\}^{-1} \times \sum_{i=1}^{3} \left\{\left[\sigma' - \sigma_i' \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} \partial\sigma'/\partial\sigma_j'\right)\right] \cdot d\varepsilon_i^p\right\} \quad \cdots (4)$$

式（5）は，ケンブリッジの応力増分 $dp'=(d\sigma_a'+2d\sigma_r')/3$, $dq=d\sigma_a'-d\sigma_r$とひずみ増分 $d\varepsilon_v=d\varepsilon_a+2d\varepsilon_r$, $d\varepsilon_s=2(d\varepsilon_a-d\varepsilon_r)/3$の関係を弾塑性構成式で表したものである．右辺第１項は弾性挙動を，右辺第２項は塑性挙動を表しており，h，n，sから構成されるマトリックスは，空間滑動面上の応力増分 $d\sigma'$, $d\tau$と塑性ひずみ増分$d\varepsilon^p$, $d\gamma^p$の関係（関連流れ則）を表している．［A］はひずみ増分$d\varepsilon^p$, $d\gamma^p$をケンブリッジのひずみ増分$d\varepsilon_v^p$, $d\varepsilon_s^p$に変換するためのマトリックスであり，式（4）より導かれる．［B］は応力増分dp', dqを応力増分$d\sigma'$, $d\tau$に変換するためのマトリックスを示している．

式（5）は，粘土要素の挙動の順解析モデルとして役立つ．図１ならびに図２のプロットは，ウィールドクレイの拘束圧一定非排水三軸圧縮試験結果（ Bishop and Henkel, 1962）を示している．図２ならびに図３はその逆解析結果であり，図３は塑性ひずみ増分比$y=d\varepsilon^p/d\gamma^p$と応力比$x=\tau/\sigma'$の関係を，図４は正規化された弾性定数$K'/p'=34.7$, G'/p'とxの関係を示している．ここに，D=0.0435, M=0.865, $e_0=0.640$, $\lambda=0.109$, $\kappa=0.0472$, $x_0=0.0$, $x_f=0.384$, $\sigma_{y0}'=2.12\mathrm{kgf/cm^2}$である．すなわち，これらの逆解析結果を導入した式（5）は，三軸圧縮せん断挙動はもちろんのこと三軸伸張せん断挙動さえも予測できる順解析モデルとなる．

3．おわりに　提案する諸式は，一般応力状態の議論に拡張できることは言うまでもない．有限要素法に組み込めば，三主応力がバラバラに作用しているときの粘土要素の挙動を計算することができる．次回は，異方圧密粘土に対して式（5）が有効であることを示したい．

参考文献　1）三隅浩二，山崎礼智，応力の第３不変量までも考慮した異方圧密粘土の三軸試験データ解析，土木学会第52回年次学術講演会講演概要集，第３部（A），pp. 114-115, 1997.
2）三隅浩二，火山憲司ほか，空間滑動面における粘土の降伏曲線と摩擦係数の考察，第31回地盤質工学研究発表会平成８年度発表講演集２分冊の１，pp. 809-810, 1996.

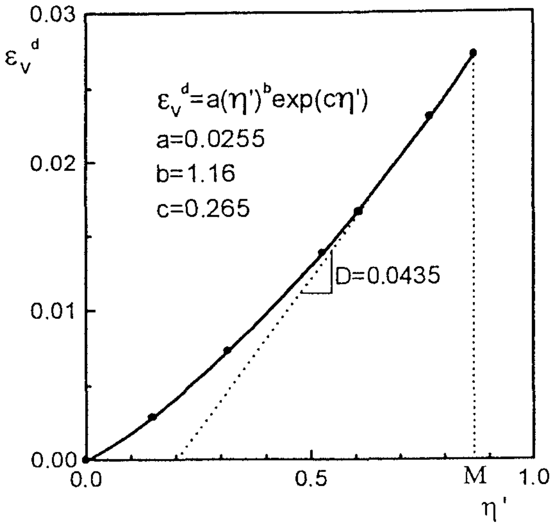

図１ Weald Clay のダイレイタンシー挙動

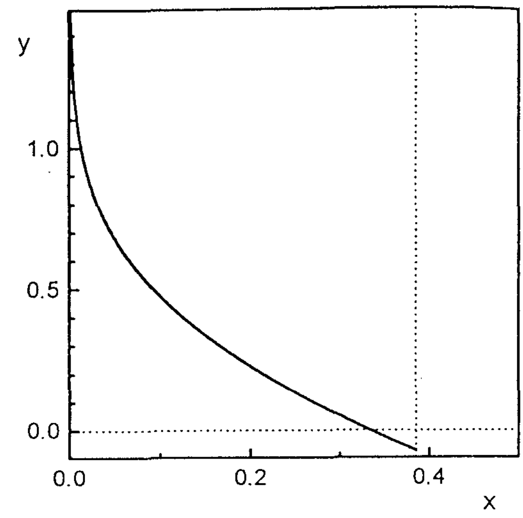

図３ 逆解析で得られた塑性挙動

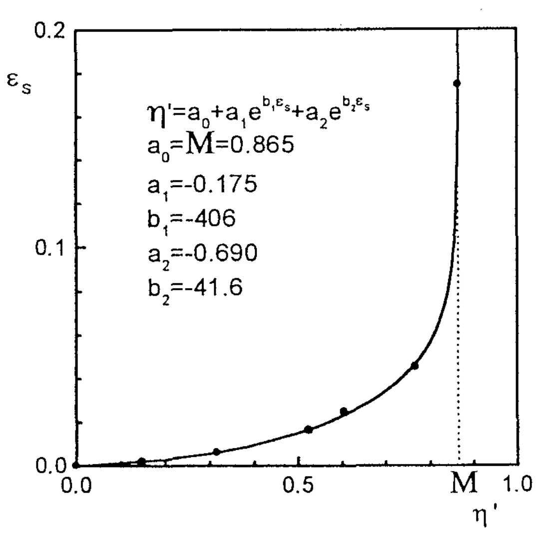

図２ Weald Clay のせん断ひずみ挙動

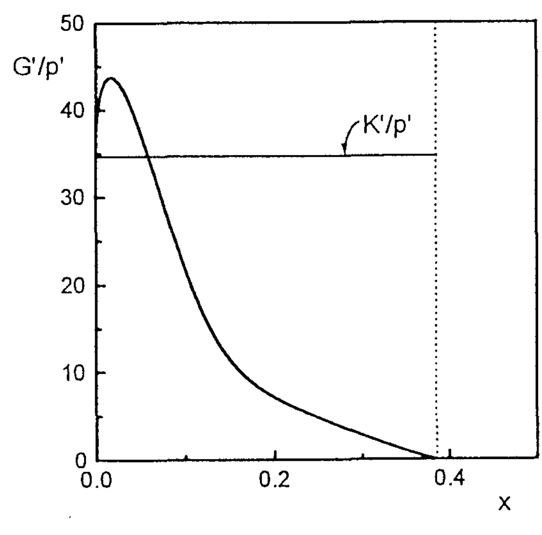

図４ 逆解析で得られた弾性挙動

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_V \\ d\varepsilon_S \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} K'^{-1} & 0 \\ 0 & (3G')^{-1} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dp' \\ dq \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} hn^2 & hns \\ hns & hs^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dp' \\ dq \end{Bmatrix} \tag{5}$$

$$h = (A_1 n + A_2 s)^{-1} \quad n = \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \quad s = \frac{\partial f}{\partial \tau} \qquad f = g = \varepsilon_V{}^p = DM\left\{\ln\left(\sigma'/\sigma_{y0}'\right) + \int_{x_0}^{x} (x+y)^{-1} dx\right\}$$