緩勾配方程式と位相関数について

九州大学大学院　正会員　中 村　修

1．はじめに

緩勾配方程式の適用範囲拡大に資するため、同方程式により記述される波が、一定の角周波数を持つ場合の位相関数を具体的に求めた。緩勾配方程式は、係数が解に依存する意味で準線形方程式と言えようが、上の場合には線形化されている。このときの位相関数は、当然、既に何処かで求められていると考えられるが、緩勾配方程式の輸送方程式を構成する必要上、改めて此れを求めた。

2．位相関数の誘導と結果

先ず、緩勾配方程式と分散関係式を示す。

$$\partial^2 u \big/ \partial t^2 - \nabla(cc_g \nabla u) + \sigma^2 (1-n)\, u = 0, \quad \cdots\cdots(1), \qquad c = \frac{\sigma}{k} = \left(\frac{g}{k}\tanh kh\right)^{1/2}, \quad \cdots\cdots(2)$$

ここに、u ：水表面の速度ポテンシャル, c ：波速, c_g ：群速度, σ ：角周波数, k ：波数, n ：$\dfrac{c_g}{c}$, h ：水深, などである。 $c = c(x, y, \sigma)$ 等と書けるので、これらを用いて式 (1) を書き換えれば、

$$\partial^2 u \big/ \partial t^2 - c(x,y,\sigma)\cdot c_g(x,y,\sigma)\ \nabla^2 u - b_1(x,y,\sigma)\frac{\partial u}{\partial x} - b_2(x,y,\sigma)\frac{\partial u}{\partial y} + d(x,y,\sigma)\ u = 0, \tag{3}$$

となる。もし、u の初期値および境界値の σ が一定であれば、解 u の σ は、常に一定に保たれ、自己変調する事はない。これは、上式のアイコナル方程式とその特性微分方程式を調べることに依っても解る。従って、以下の条件を設けて解析を進める。

- 条件（A）：本論では、u の初期値および(入射)境界値の角周波数は、常に一定値 $\sigma = \sigma_0$ を保つものとする。

このとき、解 u の σ は一定となり、式 (3) は、線形変数係数双曲型方程式と見なせる。よって、次の形の解を仮定できる。

$$u(t,x,y,\sigma) = A(t,x,y,\sigma)\ e^{-i\phi_1(t,x,y,\sigma)} + B(t,x,y,\sigma)\ e^{-i\phi_2(t,x,y,\sigma)}. \tag{4}$$

ここに、$A(t,x,y,\sigma), B(t,x,y,\sigma)$ は振幅関数であり、ϕ_1, ϕ_2 は波 u の位相関数である。以下では、位相関数を具体的に求めることとする。エネルギー平衡方程式の場合と同様に、異なる角周波数の波は、適当な方法で合成できるものとすれば、条件（A）は、実用上、解析の一般性を著しく損うものではないと言えよう。また、本論では位相関数のみを検討するので、式 (3)については、主要部のみを考えればよい[4]。

簡単のため、$a(x_1, x_2, \sigma_0)^2 = cc_g,\ \ x_1 = x,\ \ x_2 = y$ などと置く。位相関数を、$\phi(t, x, p, x_0, p_0, t_0)$ と表すこととして、式 (3) のアイコナル方程式を書けば、

$$\phi_t^2 - a^2\phi_{x_1}^2 - a^2\phi_{x_2}^2 \ = \ 0\ , \tag{5}$$

である。以下では、簡単のため進行波のみ取り扱う。式(5)をハミルトン－ヤコビの式に書き換えると、

$$\phi_t + a\sqrt{\phi_{x_1}^2 + \phi_{x_2}^2} = 0\ , \tag{6}$$

となる。 $p_1=\phi_{x_1}$, $p_2=\phi_{x_2}$, $\tau=\partial\phi/\partial t$, $H=a\sqrt{p_1^2+p_2^2}$, と置いて、式 (6)の特性微分方程式（吉田[2], 大島－小松[3],etc.参照 ）を書くと、

$$dt=\frac{dx_1}{\partial H/\partial p_1}=\frac{dx_2}{\partial H/\partial p_2}\frac{-dp_1}{\partial H/\partial x_1}==\frac{-dp_2}{\partial H/\partial x_2}=\frac{d\phi}{\tau+\sum_{i=1}^2 p_i}=\frac{-d\tau}{\partial H/\partial t}\ , \tag{7}$$

である。式(6)は、$\sigma\, t=\sigma\,\varphi(x_1,x_2)$ の形の解をもつと想定できる[2]。式 (7) より、

$$dx_i/dt=\frac{\partial H}{\partial p_i}=ap_i/\sqrt{p_1^2+p_2^2},\quad \cdots(8),\qquad dp_i/dt=-\frac{\partial H}{\partial x_i}=-\frac{\partial a}{\partial x_i}\sqrt{p_1^2+p_2^2},\ (i=1,2),\quad \cdots(9)$$

$$d\tau/dt=-\partial H/\partial t=0,\quad \cdots\cdots(10),\qquad d\phi/dt=\sum_{i=1}^2 p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}+\tau=a\sqrt{p_1^2+p_2^2}+\tau=0.\quad \cdots(11)$$

$$\therefore\ \phi=\int_{t_0}^t L\,dt+\phi_0=\int_{t_0}^t\sum p_i\,\partial H/\partial p_i\,dt+\int_{t_0}^t\tau\cdot dt+\phi_0=const.\ , \tag{12}$$

となる。正準方程式 (8), (9)を解いて、x_1,x_2,p_1,p_2 等を求めて、式 (10), (12) に代入すれば、ϕが求まる[3]。いま、 $d\theta/ds=\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}\ =\frac{1}{c}\left(\sin\theta\frac{\partial c}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial c}{\partial y}\right)\approx\frac{1}{a}\left(\sin\theta\frac{\partial a}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial a}{\partial y}\right)$,

なる関係式[5]と、$ds=a\,dt$を考慮すれば、次の一組の解は、式 (8), (9) を充たすことがわかる。

$$(p_1=\cos\theta/a,\ p_2=\sin\theta/a)\ ,\ \text{or}\ \ (p_1=\frac{\sigma\cos\theta}{a},p_2=\frac{\sigma\sin\theta}{a})\ . \tag{13}$$

検証は、式 (13) を式 (8), (9) に代入すればよい。また直接 θを求めるには、$d\theta/ds$ の式を積分する。

いま、 $k=\frac{\sigma}{c}\approx\frac{\sigma}{a}$, と再定義して、式 (13),(10),(12),(6) をもとに位相関数を構成すると、

$$\phi(t,x,p,x_0,p_0,t_0)=\int_{t_0}^t L(p,x,t)dt+\phi_0=\sigma\int_{t_0}^t\cos^2\theta\cdot dt+\sigma\int_{t_0}^t\sin^2\theta\cdot dt-\sigma\int_{t_0}^t 1\cdot dt+\phi_0$$

$$=\ \int_{x_1(t_0)}^{x_1(t)}k\cos\theta\,dx_1+\int_{x_2(t_0)}^{x_2(t)}k\sin\theta\,dx_2-\int_{t_0}^t\sigma\,dt+\phi_0=\ const.\ , \tag{14}$$

となる。ただし、$\sigma=\sigma_0=k_0a_0$ と θ_0は、uの初期 - 境界条件（ 条件（A））より定まり、ϕ_0は積分定数である。なお、ϕの勾配は、$(\phi_t,\phi_x,\phi_y)=(-\sigma,k\cos\theta,k\sin\theta)$, となる。

参考文献

1．磯部 雅彦 ： 波浪変形解析のための波動方程式の比較研究，土木学会論文集　No.491, 1945.
2．吉田 耕作 ： 微分方程式の解法，岩波全書，１９５４．
3．大島 & 小松 ： 1階偏微分方程式，岩波講座 基礎数学，１９７７．
4．井川　満　： 偏微分方程式２，岩波講座，１９９７．
5．井島 武士　：海岸工学，朝倉書店，１９７０．