

ライズを持つ長方形板の非線形振動挙動の解析

長崎大学工学部 学生員 〇三堂 聡

長崎大学工学部 正 員 高橋 和雄

1. まえがき

薄板にライズを持たせると剛性が高まり構造上有利であるが、動的荷重が作用する場合は、動座屈や振動の問題が生じてくる。本研究は、これまでの偏平アーチの取り扱いを板構造に拡張して解析する。理論解析にあたっては、ライズを持つ長方形板の非線形運動方程式を Galerkin 法を適用して 1 自由度系に近似し、さらに調和バランス法を用いて連立非線形代数方程式に変換し、Newton-Raphson 法により解析する。ライズ比、縦横比、減衰定数、荷重強度などをパラメータに数値解析を行ない、非線形振動特性を明らかにする。

2. 運動方程式

図—1 のような長方形板のたわみを w 、初期変形を w_0 とすると、ライズをもつ長方形板の運動方程式と適合条件式は、次のように表される²⁾。

$$L(w, F) = \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - p_0 \cos \Omega t - d \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^4 F = E \left[\left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\}^2 - \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \right] \quad (2)$$

ここに、 t : 時間, d : 板厚, ρ : 板の密度, p_0 : 荷重強度,

$$D = Ed^3 / 12(1 - \nu^2), \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

Ω : 励振円振動数, E : ヤング率, ν : ポアソン比,

F : Airy の応力関数。

板の境界条件は、曲げに対して 4 辺単純支持とし、面内変位 u, v は固定とする。

3. 解法

式(1)の解を境界条件を考慮し 1 自由度で次式(3)のように

仮定する。また、初期変形も与えられた境界条件を満足しなければならない。本研究では、解析的取り扱いのできる次式(4)のように仮定する。

$$w = dT(t) \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad (3)$$

$$w_0 = e_0 d \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y \quad (4)$$

ここに、 $T(t)$: 未知の時間関数, e_0 : 板厚で無次元化した初期変形の大きさ (ライズ比)。

解析の手順として、まず式(2)より応力関数 F を式(3),(4)を用いて解き、面内方向の境界条件の下に決定しなければならない。式(2)の一般解は次のように表わされる。

$$F = F_p + F_c \quad (5)$$

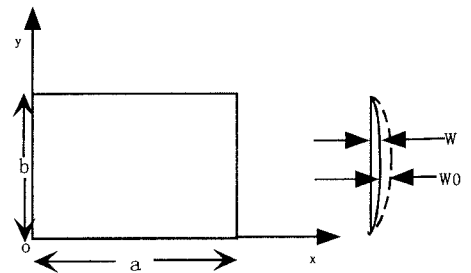
ここに、 F_p : 特解, F_c : 余解。式(2)の余解を次のように仮定すれば、 $\nabla^4 F_c = 0$ を満足する。

$$F_c = A(t)x^2 + B(t)y^2 \quad (6)$$

ここに、 $A(t), B(t)$: 面内変位の境界条件を満足するように決定される時間 t の関数。

運動方程式(1)に式(3),(4),(5)を代入して、Galerkin 法を適用すると、運動方程式は次のような時間に関する運動方程式に変換される。

$$\ddot{T} + 2h\dot{T} + (1 + e_0^2\alpha)T + e_0\beta T^2 + \gamma T^3 = \delta p \cos \omega t \quad (7)$$



図—1 長方形板の座標系

ここに、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$: 係数, $p = p_0 b^4 / Dd$: 荷重強度,
 $\omega = \Omega / \omega_{11}$: 線形 1 次固有円振動数, $\mu = a / b$: 縦横比,
 $\tau = \omega_{11} t$: 無次元時間, $\mu = a / b$: 縦横比, h : 減衰定数.

上式の解を次のように仮定する.

$$T = C_0 + C_1 \cos \omega \tau + C_{1/2} \cos \frac{\omega}{2} \tau + S_1 \sin \omega \tau + S_{1/2} \sin \frac{\omega}{2} \tau \quad (8)$$

ここに、 C_0, C_1, S_1 : 付随型の振幅成分, $C_{1/2}, S_{1/2}$: 分岐型の振幅成分.

式(8)を式(7)に代入して、調和バランス法を適用すれば連立非線形代数方程式が得られる。これに Newton-Raphson 法を用いて解けば、振幅成分が得られる。

4. 解析結果

(1) 非線形自由振動特性 図—2, 3 は、正方形板 ($h=0$, $\nu=0.3$, $\mu=1$) の非線形自由振動数に及ぼすライズの影響を示したものである。これらの図において、縦軸は振幅の変動成分 c_1 及び直流成分 (静的応答成分) c_0 をそれぞれ示し、横軸は非線形自由振動数を線形 1 次固有振動数で無次元化した非線形自由振動数 ω である。図—2 のように平板 ($e_0 = 0$) の場合、振動数は振幅 c_1 の増大とともに単調に増加するのみであるが、ライズ比が板厚程度になるとライズの影響が効いてくる。振幅が小さい場合には、軟化バネ特性を示し、振幅がライズ比より大きくなる硬化バネの特性を示す。図—3 に注目すると、直流成分は振幅の増加とともにライズ比 e_0 を打ち消す方向 (符号がマイナス) に作用し、 $e_0 + c_0 \approx 0$ の状態に近づく。 $e_0 + c_0$ が小さくなる領域で軟化バネ特性を示す。 $e_0 + c_0 \approx 0$ となると、ライズのある長方形板は、平板に一致することになる。なお、図—2 には Runge-Kutta-Gill 法による数値シミュレーションの結果が・印を用いてプロットされている。解析解とシミュレーションによる結果は一致する。

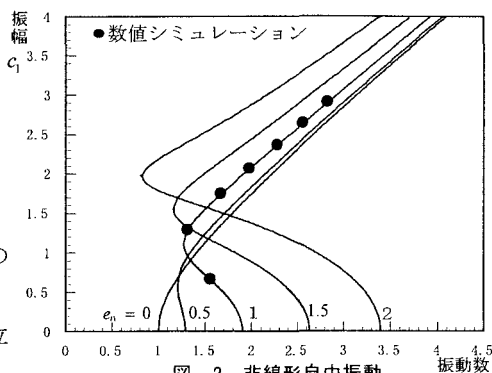
(2) 非線形強制振動 図—4, 5 に、 $e_0 = 0$ と 1 の正方形板の強制振動の応答曲線を荷重強度をパラメータに示す。縦軸は振幅成分 $c_1, c_{1/2}, s_{1/2}$ で、横軸 ω は無次元励振振動数である。固有振動数 $\omega = 1.0, 1.8$ 付近に生ずる主共振 c_1 に加えて、固有振動数の 2 倍付近に 1/2 分数波共振が表われている。ライズがある場合には応答曲線が左右に傾いており、カオスをはじめ各種の不安定現象が発生することが予想される。

5. まとめ

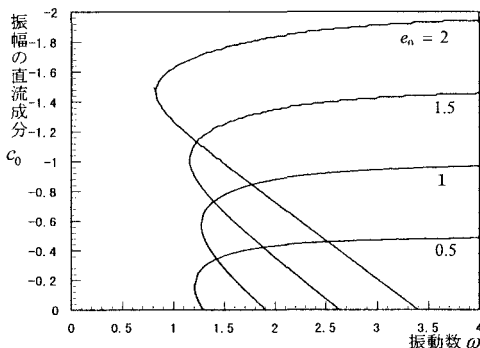
本研究では、固定単純支持の場合を解析したが今後さらに、座屈、カオス、境界条件の影響などを解析する予定である。

参考文献

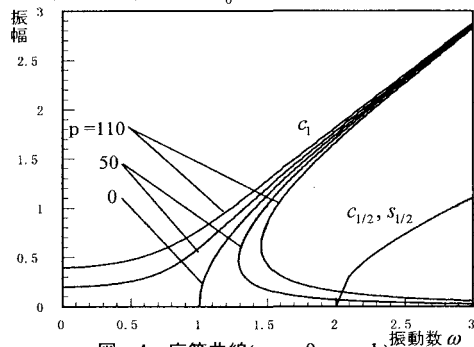
- 1) 高橋和雄・太田晶一：構造工学論文集, Vol.42A, pp.55—61, 1996.3.
- 2) 関谷壮・斎藤渥：薄板構造力学, 共立出版, pp.161—237, 1968.



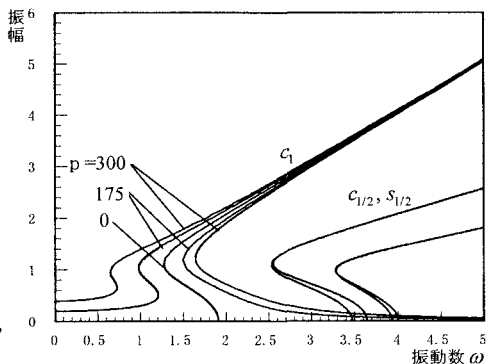
図—2 非線形自由振動



図—3 直流成分 c_0 と無次元振動数 ω の関係



図—4 応答曲線 ($e_0 = 0, \mu = 1$)



図—5 応答曲線 ($e_0 = -1, \mu = 1$)