

有限帯板法による片持ち板構造の振動および座屈解析

長崎大学大学院 学生員○中澤聡志

長崎大学大学院 学生員 呉 明強

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

1. まえがき

著者らは、ガラーキン法を用いて平板の振動、座屈および動的安定性解析¹⁾を行ってきたが、ガラーキン法はプレートガーダー断面のような複雑な断面には適用しにくい。一方、有限帯板法は比較的少ない自由度で、平板や箱桁、プレートガーダーなどの板構造を解析することが可能である。有限帯板法を用いた一対辺が単純支持された平板や補剛板、箱桁などの振動解析は数多く行われているが、片持ち板構造物を対象とした解析は見受けられない。このような現状から、片持ち板構造の動的安定解析を行う第1段階として、本研究では有限帯板法による片持ち板構造の振動および座屈解析を行い、その有用性を確かめる。

2. 解析方法^{2,3)}

図-1に示すような薄板で構成される片持ちプレートガーダー構造を設定する。

平板の変形に伴う運動エネルギー T およびひずみエネルギー U は次のように定義される。

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \quad (1)$$

$$U = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ + \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2)$$

ここに、 u, v, w : x, y, z 方向の変位、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$: 板の曲げ剛性、 E : 弾性係数、 ν : ポアソン比、 ρ : 単位体積質量、 t : 板厚。

本研究では、有限帯板法による解析を行う。帯板要素内の任意点の局所座標系 x', y', z' 方向の変位成分 u, v, w は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^N \begin{bmatrix} <f_1 & f_2 & f_3>S_m & 0 & 0 \\ 0 & <f_1 & f_2 & f_3>S_m & 0 \\ 0 & 0 & <f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 & f_9>S_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_m\} \\ \{V_m\} \\ \{W_m\} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ここに、 $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9$: 形状関数、 $\{U_m\}, \{V_m\}, \{W_m\}$: 級数の第 m 項に対する節線変位ベクトル。 S_m : 片持ちばりの固有振動形、 N : 級数の採用項数。なお、両端の境界条件が単純支持の場合、 $v = A(\partial u / \partial y)$ が使用されている。片持ち板構造の場合、この関係を導入すると、剛性を高めに評価するので、本研究では、 u と v を独立に仮定する。

Hamilton の原理に基づいて、式(3)の要素に関する運動方程式を誘導する。次いで、局所座標系 (x', y', z') に関する各マトリックスを全体座標系 (x, y, z) に関する量に変換し、変位の適合条件と力の釣り合い条件にしたがってすべての帯板要素について重ね合わせることで、図-1に示す板構造に対する運動方程式を求めることができる。すなわち、

$$[M]\{\ddot{d}(t)\} + [K]\{d(t)\} = \{0\} \quad (4)$$

ここに、 $[M]$: 質量マトリックス、 $[K]$: 剛性マトリックス、 $\{\ddot{d}(t)\}$: 加速度ベクトル、 $\{d(t)\}$: 変位ベクトル。

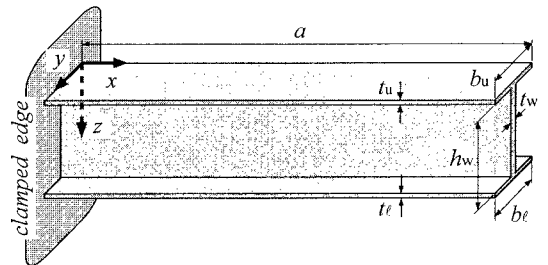


図-1 片持ち板構造の解析モデル

上式の解 $\{d(t)\} = \{\bar{d}\}e^{i\omega t}$ とおけば、行列固有値問題に変換される。これを用いて、固有振動数と固有振動形が得られる。

3. 振動解析結果

(1) 正方形板の解析結果 有限帯板法を用いた一枚の片持ち正方形板（一边固定，他端自由）の振動解析結果と，*Galerkin* 法による結果¹⁾との比較を表-1に示す。計算した板の諸元は，辺長 $b=30\text{cm}$ ，板厚 $t=1\text{cm}$ ，ポアソン比 $\nu=0.3$ ，弾性係数 $E=2.06 \times 10^9 \text{ kg/cm} \cdot \text{sec}^2$ ，単位体積質量 $\rho=0.00784 \text{ kg/cm}^3$ である。有限帯板法において使用項数 $N=10$ とし，断面の分割を8とした。両者の振動数がほぼ一致することから，有限帯板法の結果は妥当である。

(2) 項数 N による振動数の収束 図-2に， $a=30\text{cm}$ ， $b_u=b_\ell=15\text{cm}$ ， $h_w=30\text{cm}$ ， $t_\ell=t_u=t_w=1\text{cm}$ のプレートガーダー板片持ち構造の4次までの振動数の収束状況を示す。項数 N の増加に伴って振動数は収束し， $N=8$ で収束したとみなせる。したがって，本解析では8項近似を採用することにした。

(3) 固有振動特性 片持ち板構造のスパンを増大させたときの振動数の変動を図-3に示す。 $h_w=30\text{cm}$ ， $t_\ell=t_u=t_w=1\text{cm}$ ， $b_u=b_\ell=15\text{cm}$ は一定とし，縦横比 $\beta=a/h_w$ を変化させる。比較対照のため，断面が変形しないはり理論による結果を表示している。 β の増加に伴い振動数は減少し， β が7より大きい場合には有限帯板法とはり理論の振動数の差は5%以下になることから，プレートガーダー片持ち構造の解析結果は妥当と判断される。

(4) 固有振動形 長さおよびウェブ高を変化させた次の3ケースを考える。各ケースの諸元は *Case1* : $a=30\text{cm}$ ， $h_w=30\text{cm}$ ，*Case2* : $a=300\text{cm}$ ， $h_w=30\text{cm}$ ，*Case3* : $a=30\text{cm}$ ， $h_w=60\text{cm}$ ，また，すべてのケースにおいて $b_u=b_\ell=15\text{cm}$ ， $t_w=1\text{cm}$ である。表-2に断面の固有振動形を示す。長さが短い場合 (*Case1*) に腹板とフランジ変形が生じている。長さが長い場合 (*Case2*) には，はりの振動に近い剛体変形振動が発生する。腹板・フランジとも曲げ変形が生じない。ウェブ高が高い場合 (*Case3*) には腹板にたわみ変形が発生し，板に局部振動が発生する。

4. まとめ

本研究では，有限帯板法を採用した片持ちプレートガーダー構造の振動解析を行いその特性を明らかにした。座屈解析結果などについては講演時に発表する。

参考文献

- 1) 呉・高橋：構造工学論文集，Vol.43A，pp.97-105，1997.3.
- 2) Cheung, Y.K. : Finite Strip Method in Structural Analysis, PERGAMON PRESS, 1976.
- 3) 黄・深澤・岡村：構造工学論文集，Vol.43A，pp.289-298，1997.3.

表-1 正方形板の解析結果の比較

次数	振動数 (Hz)	
	有限帯板法	Galerkin 法
1st	95.24	95.57
2nd	233.43	233.72
3rd	584.20	586.42
4th	748.23	748.27
5th	849.58	852.13
6th	1487.84	1489.66
7th	1680.64	1686.48
8th	1765.87	1766.82

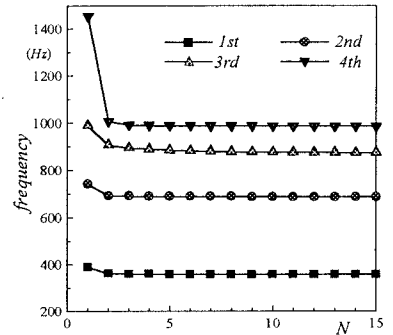


図-2 項数 N による振動数の収束状況

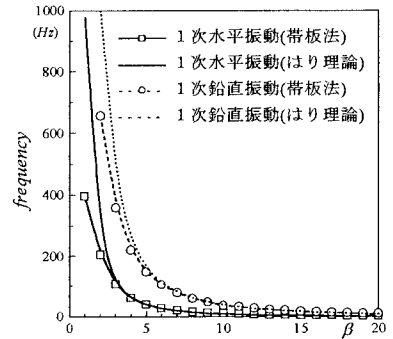


図-3 振動数曲線

表-2 固有振動形

	1st	2nd	3rd	4th	5th
Case1					
Case2					
Case3					