

中間荷重が作用する骨組構造の線形座屈解析

八代高専 正 員 ○橋本 淳也
 熊本工業大学 正 員 三池 亮次
 熊本大学 正 員 小林 一郎
 熊本工業大学 学生員 宮元 謙次

1. はじめに

筆者らは先に、剛結骨組構造の座屈解析において部材の両端応力の関係を表す平衡マトリックス $\mathbf{H}$ が重要な役割をすることを発表した。荷重として節点荷重のみで、部材間の分布荷重（以下、中間荷重という）は作用しないものとした。

ここでは、部材間に中間荷重が作用する場合の有限変位骨組構造解析の基礎式を補仮想仕事の定理を用いて誘導する。次に、この式を変位で微分することにより、接線剛性マトリックスを求め、座屈解析を行う。

2. 中間荷重が作用する場合の有限変位骨組構造解析の基礎式の誘導

有限変位補仮想仕事の定理に基づき、骨組構造部材 (i, j) に補仮想仕事の定理を適用する。ここで、仮想の状態において中間荷重は作用しないものとする。仮想の状態の変形後において、部材の始端から ξ の断面 P における仮想力を $\delta(\bar{\mathbf{p}}'_{m\xi} + \Delta\bar{\mathbf{p}}_{m\xi})$ とする。ここに、 $\bar{\mathbf{p}}'_{m\xi}$ は中間状態における値を、 $\Delta\bar{\mathbf{p}}_{m\xi}$ は中間状態よりの増分の断面力を与えるとする。以下、 $'$ は中間状態における値を、 Δ は中間状態よりの増分を、 $-$ は仮想状態を表す。

$$\delta(\bar{\mathbf{p}}'_{m\xi} + \Delta\bar{\mathbf{p}}_{m\xi}) + \mathbf{H}_{\xi j} \delta(\bar{\mathbf{p}}'_{mj} + \Delta\bar{\mathbf{p}}_{mj}) = 0 \quad (1)$$

真の中間状態、変形後の釣り合い式はそれぞれ

$$\mathbf{p}'_{m\xi} + \mathbf{H}'_{\xi j} \mathbf{p}'_{mj} + \mathbf{q}'_{L\xi j, \xi} = 0 \quad (2)$$

$$(\mathbf{p}'_{m\xi} + \Delta\mathbf{p}_{m\xi}) + \mathbf{H}_{\xi j} (\mathbf{p}'_{mj} + \Delta\mathbf{p}_{mj}) + \mathbf{q}_{L\xi j, \xi} = 0 \quad (3)$$

で表わされる。ここに、 $\mathbf{q}'_{L\xi j, \xi}$ は P_j 間部材における P 端固定荷重定数である。式(2)と(3)から

$$\Delta\mathbf{p}_{m\xi} = -\mathbf{H}_{\xi j} (\mathbf{p}'_{mj} + \Delta\mathbf{p}_{mj}) + \mathbf{H}'_{\xi j} \mathbf{p}'_{mj} - \mathbf{q}_{L\xi j, \xi} + \mathbf{q}'_{L\xi j, \xi}$$

また、仮想の力が真の状態のひずみベクトル $\Delta\mathbf{e}^0_{m\xi}$ に対してなす内部補仮想仕事は上式を用い

$$\begin{aligned} \delta\Delta U_I &= \delta(\bar{\mathbf{p}}'_{m\xi} + \Delta\bar{\mathbf{p}}_{m\xi})^T (\Delta\mathbf{e}^0_{m\xi} + \Delta\mathbf{e}_{m\theta, \xi})_I d\xi \\ &= -\delta\bar{\mathbf{p}}_{mj, I}^T \int_I \left\{ \mathbf{H}_{\xi j}^T (\mathbf{F}_e \Delta\mathbf{p}_{m\xi} + \Delta\mathbf{e}_{m\theta, \xi}) \right\} d\xi \\ &= \delta\bar{\mathbf{p}}_{mj, I}^T \int_I \left\{ (\mathbf{H}_{\xi j}^T \mathbf{F}_e \mathbf{H}_{\xi j}) \Delta\mathbf{p}_{mj} + (\mathbf{H}_{\xi j}^T \mathbf{F}_e \Delta\mathbf{H}_{\xi j}) \mathbf{p}'_{mj} + \mathbf{H}_{\xi j}^T \mathbf{F}_e \Delta\mathbf{q}_{L\xi j, \xi} - \mathbf{H}_{\xi j}^T \Delta\mathbf{e}_{m\theta, \xi} \right\} d\xi \end{aligned} \quad (4)$$

ここに $\Delta\mathbf{e}_{\theta, \xi}$ はひまかけのひずみベクトルで

$$\Delta\mathbf{H}_{\xi j} = \mathbf{H}_{\xi j} - \mathbf{H}'_{\xi j}, \quad \Delta\mathbf{q}_{L\xi j, \xi} = \mathbf{q}_{L\xi j, \xi} - \mathbf{q}'_{L\xi j, \xi}$$

である。また

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{mI} &= \int_I \mathbf{H}_{\xi j}^T \mathbf{F}_e \mathbf{H}_{\xi j} d\xi, & \Delta\mathbf{F}_{mI} &= \int_I \mathbf{H}_{\xi j}^T \mathbf{F}_e \Delta\mathbf{H}_{\xi j} d\xi \\ \Delta\mathbf{e}_{\theta I} &= -\int_I \mathbf{H}_{\xi j}^T \Delta\mathbf{e}_{m\theta, \xi} d\xi, & \Delta\mathbf{e}_{qI} &= \int_I \mathbf{H}_{\xi j}^T \mathbf{F}_e \Delta\mathbf{q}_{L\xi j, \xi} d\xi \end{aligned} \quad (5)$$

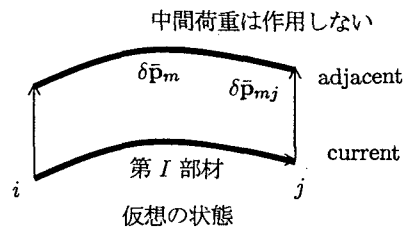
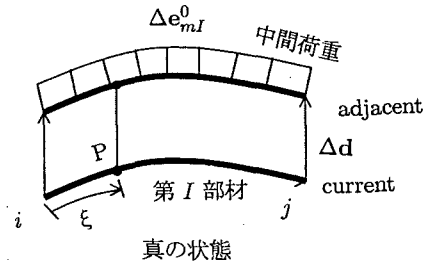


図-1 部材に作用する力

を定義すれば

$$\delta\Delta U_I = \delta\bar{\mathbf{p}}_{mj}^T \{ \mathbf{F}_{mI} \Delta \mathbf{p}_{m\xi} + \Delta \mathbf{F}_{mI} \Delta \mathbf{p}'_{m\xi} + \Delta \mathbf{e}_{qI} + \Delta \mathbf{e}_{\theta I} \} \quad (6)$$

を得る。したがって、骨組構造の仮想仕事における外力 $\delta\bar{\mathbf{p}} = \delta(\mathbf{p}' + \Delta\bar{\mathbf{p}})$ が実際の変位 $\Delta\mathbf{d}$ に対してなす外部補仮想仕事は式(6)の第 I 部材の内部補仮想仕事を全部材について集めたものに等しく

$$\delta(\mathbf{p}' + \Delta\bar{\mathbf{p}})^T \Delta\mathbf{d} = \delta\bar{\mathbf{p}}_m^T \{ \mathbf{F}_m \Delta \mathbf{p}_m + \Delta \mathbf{F}_m \Delta \mathbf{p}'_m + \Delta \mathbf{e}_q + \Delta \mathbf{e}_\theta \} \quad (7)$$

変形後の接続マトリックス $\mathbf{C}$ を用い $\delta\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{C}\delta\bar{\mathbf{p}}_m$ の関係があるから、これを式(13)に代入

$$\delta\bar{\mathbf{p}}_m^T \mathbf{C}^T \Delta\mathbf{d} = \delta\bar{\mathbf{p}}_m^T \{ \mathbf{F}_m \Delta \mathbf{p}_m + \Delta \mathbf{F}_m \Delta \mathbf{p}'_m + \Delta \mathbf{e}_q + \Delta \mathbf{e}_\theta \}$$

これより

$$\Delta \mathbf{p}_m = \mathbf{K}_m \mathbf{C}^T \Delta\mathbf{d} + \Delta \mathbf{c}_m \quad (8)$$

ここに $\Delta \mathbf{c}_m$ は $\Delta\mathbf{d} = \mathbf{0}$ とするときの中間荷重による断面力を与える荷重項であり

$$\Delta \mathbf{c}_m = -\mathbf{K}_m (\Delta \mathbf{F}_m \Delta \mathbf{p}'_m + \Delta \mathbf{e}_q + \Delta \mathbf{e}_\theta) \quad (9)$$

真の中間状態、変形後の状態における節点外力 $\mathbf{p}$ と終端の断面力 $\mathbf{p}_m$ の間にはそれぞれ

$$\mathbf{p}' = \mathbf{C}' \mathbf{p}'_m + \mathbf{c}'_L$$

$$(\mathbf{p}' + \Delta\mathbf{p}) = (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})(\mathbf{p}'_m + \Delta\mathbf{p}_m) + \mathbf{c}_L$$

が成り立つ。ここに $\mathbf{c}_L, \mathbf{c}'_L$ は変形後および変形の中間状態における一端固定荷重項で、 $\Delta \mathbf{c}_L = \mathbf{c}_L - \mathbf{c}'_L$ とすると、上式および式(8)を用い

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{C} \mathbf{K}_m \mathbf{C}^T \Delta\mathbf{d} + \mathbf{C} \mathbf{c}_m + \Delta \mathbf{C} \mathbf{p}'_m + \Delta \mathbf{c}_L$$

を得る。上式をまとめて

$$\mathbf{p} = \mathbf{K} \Delta\mathbf{d} + \mathbf{b} \quad (10)$$

ここに

$$\mathbf{K} = \mathbf{C} \mathbf{K}_m \mathbf{C} \quad , \quad \mathbf{b} = \mathbf{C} \mathbf{c}_m + \Delta \mathbf{c}_L + \Delta \mathbf{C} \mathbf{p}'_m \quad (11)$$

3. 接線剛性マトリックスの誘導

式(11)より

$$\delta\Delta \mathbf{p} = \left\{ \mathbf{K}'_E + \left[\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]_0 \mathbf{p}'_m - \mathbf{C}' \mathbf{K}'_m \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_m}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]_0 \mathbf{p}'_m \right\} \delta\Delta \mathbf{d} - \mathbf{C}' \mathbf{K}' \delta\Delta \mathbf{e}_q + \delta\Delta \mathbf{c}_L$$

式(5)より $\delta\Delta \mathbf{e}_q$, $\delta\Delta \mathbf{c}_L$ の第 I ブロック要素はそれぞれ

$$\begin{aligned} (\delta\Delta \mathbf{e}_{q,I})_0 &= \int_0^l \delta \{ \mathbf{H}_{\xi j}^T \mathbf{F}_e \Delta \mathbf{q}_{L\xi j, \xi} \} d\xi \\ &= \int_0^l \mathbf{H}_{\xi j}^T \mathbf{F}_e \int_\xi^j \left[\frac{\partial \mathbf{H}_{\xi s, \xi}}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]_0 \mathbf{q}'_s \delta\Delta \mathbf{d} ds d\xi + \int_0^l \mathbf{H}_{\xi j}^T \mathbf{F}_e \int_\xi^j \mathbf{H}'_{\xi s, \xi} \delta \mathbf{q}'_s ds d\xi \\ \delta\Delta \mathbf{c}_L &= \left[\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \delta \mathbf{d}} \right]_0 \mathbf{q}'_L \delta\Delta \mathbf{d} + \mathbf{L}' \delta \mathbf{q}_L \end{aligned}$$

のようになる。よって、接線剛性マトリックスが誘導され、座屈解析が可能になる。

参考文献

- 1) Miike, R. , Kobayashi , I. and Yamada, Y. : Virtual Large Displacement Theorem for Framed Structures, J. Engrg. Mech. ASCE, pp411-428, 1990.
- 2) 宮元謙次, 橋本淳也, 三池亮次: 接続マトリックスを用いた中間荷重作用の骨組構造解析, 土木学会第52回年次学術講演会講演概要集1-A, pp.230-231, 1997.9