制御変位を用いた非線形座屈解析

熊本工業大学　学生員　宮元　謙次
同上　正員　三池　亮次
八代工業専門学校　正員　橋本　淳也

1．はじめに

非線形の挙動をする骨組み構造の分岐座屈及びその座屈後挙動の解析は、座屈点において荷重と変位の関係が特異となり数値不安定が生じるために困難となる。この問題について、すでに多くの研究者によって解析が進められている。半谷[1]は摂動方程式に一般逆行列の手法を適用して座屈点を求める手法を提案している。Fujii and Okazaki[2]の分岐座屈の研究も注目に値するが、これらの方法は、座屈点において接線剛性マトリックス$\mathbf{K}_T$の行列式$|\mathbf{K}_T|=0$となる点を追求するものである。
ここでは、制御変位による有限変位解析を行い、座屈近傍における座屈増加荷重$\Delta\lambda$が、制御変位に対して0となるように座屈点を求める手法を提案する。

2．有限変位解析

座屈点の近傍の点S"における荷重と変位をp", d"とし、座屈点Sにおける値を$\mathbf{p}=\mathbf{p}"+\Delta\mathbf{p}, \mathbf{d}=\mathbf{d}"+\Delta\mathbf{d}$とする。$\Delta\mathbf{p}$と$\Delta\mathbf{d}$は、増分荷重、増分変位である。$\Delta\mathbf{p}$と$\Delta\mathbf{d}$の間には、

$$\Delta\mathbf{p}=\mathbf{K}\Delta\mathbf{d}+\mathbf{b} \qquad (1)$$

の有限変位構造解析の基礎式が成立する。ここに、$\mathbf{K}$は、増分後の剛性マトリックス、$\mathbf{b}$は、有限変位に対する補正項である。S"における接続マトリックス$\mathbf{C}"$の増分を$\Delta\mathbf{C}$とすると

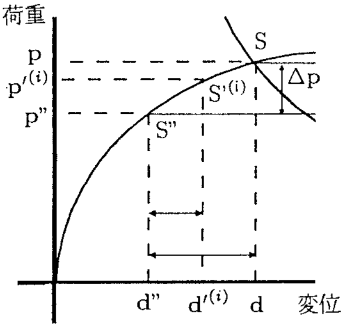

図1．荷重p－変位d曲線における座屈点S及びその近傍の点S"とS'(i)

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{K}&=(\mathbf{C}"+\Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m(\mathbf{C}"+\Delta\mathbf{C})^T\\ \mathbf{b}&=\Delta\mathbf{C}\mathbf{p}"_m-(\mathbf{C}"+\Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{e}_{m\theta}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

軸力しか生じない大変形が可能な理想ピン結トラスの場合、上式の部材剛性マトリックス$\mathbf{K}_m$はバネ定数$k=\frac{EA_I}{L_I}$を要素とする対角マトリックスで、Eはヤング率、A_Iは第I部材の断面積、L_Iは部材長でバネ定数k_Iは、部材長の変化にかかわらず一定とする。$\mathbf{p}"_m$はS"点における部材断面力ベクトルで、トラスの場合は軸力$N"_I$によって構成される。$\Delta\mathbf{e}_{m\theta}$は有限ひずみ補正項で、部材回転角$\Delta\theta$の関数である。
式（1）を増分変位$\Delta\mathbf{d}=\{\Delta d_i\}$で微分すると

$$\begin{aligned}\delta\Delta\mathbf{p}&=(\mathbf{K}"_E+\mathbf{K}"_G)\delta\Delta\mathbf{d}\\ &\equiv\mathbf{K}"_T\delta\Delta\mathbf{d}\end{aligned} \qquad (3)$$

が得られる。ここに$\mathbf{K}"_E$は弾性剛性マトリックス、$\mathbf{K}"_G$は幾何剛性マトリックスである。いずれもS"点における値であり

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{K}"_E&=\mathbf{C}"\mathbf{K}_m\mathbf{C}"^T\\ \mathbf{K}"_G&=\left[\frac{\partial(\mathbf{C}"+\Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_{\Delta\mathbf{d}=0}\mathbf{p}"_m\equiv\left[\frac{\partial(\mathbf{C}"+\Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d_1}\mathbf{p}"_m \quad \frac{\partial(\mathbf{C}"+\Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d_2}\mathbf{p}"_m \quad \cdots\cdots\right]\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

である。上式の$\left[\frac{\partial(\mathbf{C}"+\Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]$は、立体マトリクスを表している。トラスの$\mathbf{K}_G$が部材の方向余弦ベクトル$\mathbf{l}"$を用い簡潔に与えられることについては、すでに発表の通りである。[4]

３．非線形座屈解析の定式化

S"点までの有限荷重変位曲線も式（1）および式（3）を用いて、得られたものとする。座屈点SはS"の近傍にあり、S"よりSまでの荷重、変位及び部材断面力の増分を$\Delta\mathbf{p}, \Delta\mathbf{d}$および$\Delta\mathbf{p}_m$とすると

$$\Delta\mathbf{p}_m = \mathbf{K}_m(\mathbf{C}" + \Delta\mathbf{C})^T\Delta\mathbf{d} - \mathbf{K}_m\Delta\mathbf{e}_{m\theta} \quad 、\quad \mathbf{C} = \mathbf{C}" + \Delta\mathbf{C} \tag{5}$$

式（1）の$\mathbf{K}$を$\mathbf{K}_E$とおき、これを式（5）に代入すると

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{p}_m &= \mathbf{K}_m\mathbf{C}^T\mathbf{K}_E^{-1}(\Delta\mathbf{p} - \mathbf{b}) \\ &\equiv \mathbf{D}\Delta\mathbf{p} - \mathbf{D}\mathbf{b} \qquad \text{ここに、} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{K}_m\mathbf{C}^T\mathbf{K}_E^{-1}\end{aligned} \tag{6}$$

を得る。式（3）（4）では、S"における値が用いられているが、これがS点においては、$\mathbf{K}"_E, \mathbf{K}"_G$の代わりに座屈点Sにおける$\mathbf{K}_E, \mathbf{K}_G$を用い

$$\delta\Delta\mathbf{p} = \left\{\mathbf{K}_E + \left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_S \mathbf{p}_m\right\}\delta\Delta\mathbf{d} \tag{7}$$

ここに、$\mathbf{p}_m$はS点における断面力で、$\mathbf{p}_m = \mathbf{p}"_m + \Delta\mathbf{p}_m$である。したがって、上式は

$$\begin{aligned}\delta\Delta\mathbf{p} &= \left\{\mathbf{K}_{E,S} + \left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_S (\mathbf{p}"_m + \Delta\mathbf{p}_m)\right\}\delta\Delta\mathbf{d} \\ &= \left\{\mathbf{K}_{E,S} + \left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_S (\mathbf{p}"_m - \mathbf{D}\mathbf{b}) + \left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_S \mathbf{D}\Delta\mathbf{p}\right\}\delta\Delta\mathbf{d}\end{aligned} \tag{8}$$

上式において荷重モードを$\mathbf{p}_o$とし

$$\Delta\mathbf{p} = \Delta\lambda\mathbf{p}_o \tag{9}$$

とすると、式（8）は

$$\delta\Delta\mathbf{p} = \left\{\mathbf{K}_{E,S} + \left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_S (\mathbf{p}"_m - \mathbf{D}\mathbf{b}) + \Delta\lambda\left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_S \mathbf{D}\Delta\mathbf{p}_o\right\}\delta\Delta\mathbf{d} = \mathbf{0} \tag{10}$$

となる。座屈点において、上式の$\delta\Delta\mathbf{p} = \mathbf{0}$であり、上式は座屈増分荷重$\Delta\lambda$とモード$\delta\Delta\mathbf{d}$を、それぞれ上式の固有値、固有ベクトルとして求める問題に帰着する。

４．数値解析

式（１０）において、もしS" 点よりの変位増分が適切であって、正確に座屈点Sに達するとき、その固有値解析より得られる$\Delta\lambda = 0$となるべきである。そのようなΔdを１回の計算で求めることは困難である、通常は適切と思われる変位増分$\Delta\mathbf{d}^{(i)}$を定めることになるが、$\Delta\mathbf{d}^{(i)}$に対して必ずしも$\Delta\lambda = 0$とならない。このような点を図１において$S'^{(i)}$点とする、$S'^{(i)}$点はS"よりSに近づいている。式（１０）における値を、S' 点における$\mathbf{K}'_E$等で近似する$\mathbf{b} = \mathbf{0}$とみなし、

$$\delta\Delta\mathbf{p} = \left\{\mathbf{K}_{E,S'} + \left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_{S'} \mathbf{p}'_m + \Delta\lambda\left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_{S'} \mathbf{D}'\Delta\mathbf{p}_o\right\}\delta\Delta\mathbf{d} = \mathbf{0} \tag{11}$$

座屈点では、接線剛性マトリックスは特異となり、解の発散を避けるためにS"点は固定し、この点からの制御変位$\Delta d^{(i)}$を適切に選び、変位制御法と式（１１）に基づいて、座屈増分荷重$\Delta\lambda^{(i)}$を求める。$\Delta d^{(i)}$と$\Delta\lambda^{(i)}$の関係から、$\Delta\lambda = 0$となるような制御変位を推定し、座屈荷重を求める。

参考文献　　1）半谷裕彦、川口健一；形態解析、培風館
2）F.Fujii,S.Okazawa ; Pinpointing Bifurcation Points and Branch-Switching、ASCE
3）R.Miike,I.Kobayasi,Y.Yamada;Virtual Large Displacement Theorem for Framed、ASCE
4）三池亮次、小林一郎、橋本淳也；対称骨組構造の分岐のメカニズムについて、土木構造・材料論文集