等剛性を持つ三角形メッシュ分割に関する研究

○熊本工業大学　正　員　平井一男
八代高専　内山義博
九州産業大学　正　員　水田洋司

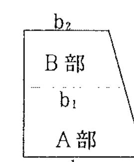
1. はじめに

応力集中問題等で、応力勾配が急変するところのメッシュ分割を細かくするのは当然であるが、集中部以外もかなり細分割する必要がある。これに伴い、計算機の容量、計算時間は増大する。このとき与系の不規則な部分は他の手法(ズーム法等)で解析すると、系の大部分はある規則的なメッシュで分割できる。ここでは、この規則的なメッシュ部分についての節点消去を便利に行う手法について述べる。

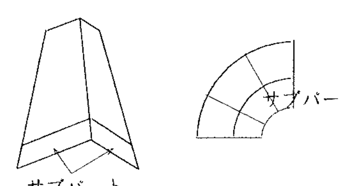
2. 理論

2. 1 相似メッシュ

一様な厚さ及び材質の板について、板が長方形板ならば均等なメッシュで分割することが可能であり平面応力問題では、剛性マトリックスも同じ要素が並ぶ。一方、形状が台形の場合は均等に分割出来ないが、相似形メッシュに分割することは可能であり相似形メッシュであればやはり剛性マトリックスは同じ要素が並ぶ。例えば図－1でA部とB部が相似であれば、A部とB部の剛性マトリックスは全く同じであり、A部(サブパート)の剛性マトリックス(サブマトリックスK_sと呼ぶ)を2つ重ね合わせれば全体の剛性マトリックスとなる。このとき相似形の条件としては、$b_1/b_0=b_2/b_1$＝一定となるように分割すればよい。すなわち、相似メッシュで分割できれば、分割数が増加してもサブパートのサブマトリックスさえ求めておけば全体の剛性マトリックスはサブマトリックスの重ね合わせで簡単に求められる。相似メッシュに分割できればよいから、例えば図－2のような形状にも適用可能である。



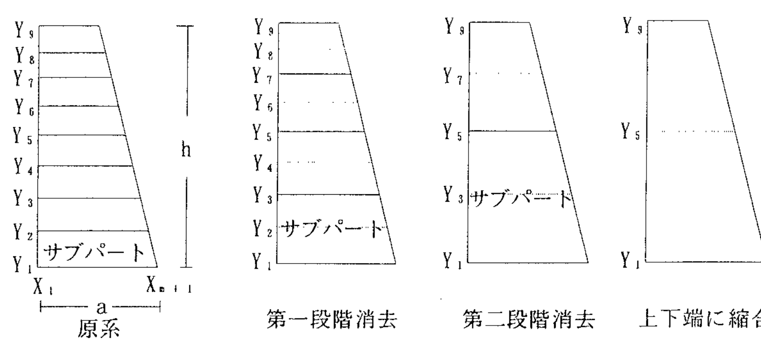
図－1



図－2

2. 2 マトリックスの消去・縮合

相似メッシュで横m分割、縦8分割された図－3に示す台形板の平面応力問題を例とする。縦8パートは相似であるから各パートはサブパートと同じ剛性マトリックスである。今、中間節点を全て消去して、上下端すなわちY_1、Y_9行に縮合することを考える。このとき、次のような手順で消去を行う。まず偶数行、つまりY_2行から一行おきに消去していく。こうすると縮合された奇数行Y_1、Y_3、…、Y_9は上下端を除いて各縦列毎に同じ値が並ぶから、Y_1とY_3に関係する部分を新しいサブパートとすればよい。この縮合された行について、また一行おきに消去を行えば縮合された行はやはり上下端を除いて各縦列毎に同じ値が並び、やはり最下部を新しいサブパートとし繰り返し消去・縮合を行えばよい。従って、各段



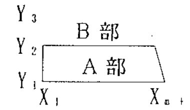
図－3

階での消去を一行おきに行う様にすれば内部行は同じ値が並ぶから、各段階毎にサブマトリックスさえ求めればよいことになり、計算容量の低減、計算時間の短縮が期待できる。

2．3 解析手順

今、図－3モデルで、縦方向の分割数を $n=2^p$ とし、中間行を全て消去して Y_1, Y_{n+1} 行に縮合する場合を考える。なおサブパートは前と同位置とする。

$$K_s = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdots (1)$$



図－4

演算に必要なパートをユニットモデルとして図－4に示す。

縦方向の分割数に対応して作成したサブマトリックス K_s を式(1)で表わす。

これは、図－4のA部の剛性マトリックスであり、マトリックスの各項は、Y_1, Y_2 行に対応している。B部もこれと同じマトリックスであるから、図－4の系はこれを重ね合わせることにより得られ、この時の、剛性方程式は式(2)となる。但し、$\overline{K}_{22}=K_{11}+K_{22}$ であり、yは対応する変位である。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & \overline{K}_{22} & K_{12} \\ 0 & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad \cdots (2)$$

式(2)を展開すると、

$$K_{11}y_1+K_{12}y_2=0 \cdots (3) \qquad K_{21}y_1+\overline{K}_{22}y_2+K_{12}y_3=0 \cdots (4) \qquad K_{21}y_2+K_{22}y_3=0 \cdots (5)$$

式(4)より　$y_2=-\overline{K}_{22}^{-1}(K_{21}y_1+K_{12}y_3) \qquad \cdots \ (6)$

式(6)を式(3), (5)に代入し y_2 の消去を行えば、縮合されたマトリックス K_c として式(7)が得られる。

$$K_c = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} \\ \tilde{K}_{21} & \tilde{K}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}-K_{12}\overline{K}_{22}^{-1}K_{21} & -K_{12}\overline{K}_{22}^{-1}K_{12} \\ -K_{21}\overline{K}_{22}^{-1}K_{21} & K_{22}-K_{21}\overline{K}_{22}^{-1}K_{12} \end{bmatrix} \quad \cdots (7)$$

K_c を新しいサブマトリックス K_s、すなわち図－4のA, B部として重ね合わせることにより作成される Y_2 行に対応する新しいマトリックスは図－3で、偶数行を縮合した新しい Y_3 行のマトリックスに一致している。式(2)を作成、Y_2 行の消去・縮合とこの演算をp回繰り返せば求める図－3モデルの Y_1, Y_{n+1} 行に関する縮合マトリックスは得られる。なお、各段階での剛性マトリックスの大きさは式(2)で見られるように、0並びに同じ要素があることから6(m＋1)×4(m＋1)で済む。また、中間行の変位は、先のルーチンを逆に行うことで全て求めることが出来る。

3．数値計算

解析法が妥当かどうかを確かめるために図－3のような台形の形状を持つ片持ち柱について数値計算を行った。柱脚固定、柱頭自由端に水平荷重640kgfが作用するものとした。モデル緒元を表－1に示す。

表－1 片持ち柱諸元

諸元	数値
柱　脚(b)	32cm
柱　頭(a)	16cm
高　さ(h)	100cm
厚　さ(t)	1cm
ポアソン比(ν)	0.3

相似メッシュの大きさは縦方向の分割数で決り縦方向分割数nとすると、相似比r, Y_j 行の幅 b_j, 高さ h_j は、それぞれ式(8)～(10)より得られる。なお、dはサブパート部の高さである。

$$b=ar^n \text{ より } r=\sqrt[n]{\frac{b}{a}} \quad \cdots (8)$$

$$\text{幅の一般項；} b_j=ar^j \quad \cdots (9)$$

$$d=\frac{1-r}{1-r^n}h \text{ より}$$

$$\text{高さの一般項；} h_j=d\sum_{m=0}^{j-1}r^m \cdots (10)$$

構造力学のたわみ理論によると、曲げたわみ y_m=0.06084cm せん断たわみ y_s=0.00412cmで総たわみ y=0.06496cmとなる。本解析法を用い、横160，縦1024分割で解析を行った。相似比r=0.993233，繰り返し回数10回の結果、自由端のたわみ y=0.06471cm、誤差0.3%であり妥当な結果であると思われる。

［参考文献］石原・内山・平井：有限要素法における節点消去の一方法について，土木学会西部支部，昭和63年3月