

ZENERモデルによるトンネルの粘弾性解析

佐賀大学 大学院 学生員 ○ 石垣 純一
佐賀大学 正員 石橋 孝治

1. まえがき

岩石を含めて多くの材料では、応力を長期間一定に保つと時間の経過に伴いひずみが増大するクリープ現象を呈する。このような時間依存性の挙動を模擬するために様々なレオロジーモデルが提案され、これらを用いて時間依存性の挙動を説明し、数式化しようという試みが行われてきた。岩石の複雑な時間依存性の挙動を表現するためのレオロジーモデルは線形から非線形モデルへと複雑化してきているが、本研究では、C. Zener によって提案されたレオロジーモデル（以後、Zener モデルと呼ぶ）を用いてトンネルの変形挙動への適用を試みた。

2. Zener モデルの概要

Zener モデルは、図-1に示すように Maxwell モデルにスプリングを並列に連結したものである。このモデルではある時刻 t_1 で応力 σ_0 を加えた場合、瞬時にひずみ ε_0 を生じる。生じた瞬時ひずみ ε_0 は2つのスプリングの弾性率によって定まる。その後応力のある期間一定に保つとひずみは徐々に増加し、 $t \rightarrow \infty$ で ε_∞ に収束する。

ある時刻 t_2 で応力を取り除いた場合、瞬時にひずみの回復が起こる。これはスプリングに蓄えられていたひずみエネルギーが解放されたためであり、その後はダッシュポットが弛緩することでひずみが減少し続け $t \rightarrow \infty$ で0となり、ひずみは完全に回復する。

図-3は図-2に示した応力-時間関係に対応するひずみ-時間関係を示したものである。

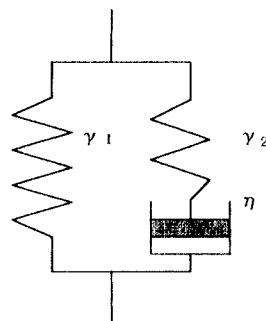


図-1 Zener モデル

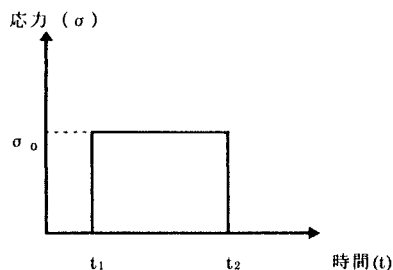


図-2 応力-時間線図

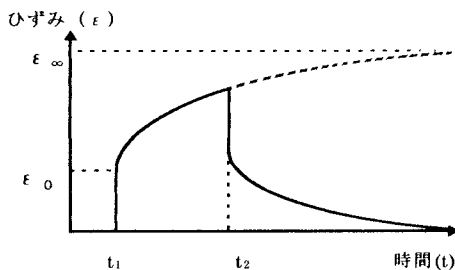


図-3 ひずみ-時間線図

3. Zener の方程式と解析例

図-1に示した Zener モデルの応力とひずみの関係は次式で与えられる。

$$\sigma + \frac{\eta}{\gamma_2} \frac{d\sigma}{dt} = \gamma_1 \left\{ \varepsilon + \eta \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \frac{d\varepsilon}{dt} \right\} \quad (1)$$

ここに、 γ_1 、 γ_2 は2つのスプリングの弾性率であり、 η はダッシュポットの粘性率である。(1)式は、応力とひずみの関係を表す線形微分方程式 (Zener の方程式) である。

ここではクリープ挙動を対象とする。図-2に示した荷重パターンにおいて $t_1=0$ として、応力を一定値 σ_0 に保つ場合を考える。(1)式を整理してこれを解けば、

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\gamma_1} \left\{ 1 - \frac{\gamma}{\gamma_1} \exp\left(-\frac{\gamma}{\eta} t\right) \right\} \quad (2)$$

を得る。ここに、 $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 / (\gamma_1 + \gamma_2)$ である。

(2)式より $t \rightarrow \infty$ におけるひずみ ε_∞ は $\varepsilon_\infty = \sigma_0 / \gamma_1$ で与えられる一定値に収束することとなる。

図-4に示すような最も単純な初期応力状態下における半径 a の円形トンネルを考える。初期応力の大きさを p_0 とし解析領域の仮想外半径を b として、厚肉円筒理論を適用すればトンネル内壁面における半径方向応力 σ_r と接線方向応力 σ_θ はそれぞれ、

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = 2p_0 b^2 / (b^2 - a^2) \quad (3)$$

で与えられる。(3)式で与えられる応力が漸消によりトンネル内壁面に生じ、これが持続するものと考えれば、半径方向ひずみ ε_r と接線方向ひずみ ε_θ は(2)式の関係に従って変化して行くことになる。トンネルの半径方向変位を u_r としトンネル内壁面のそれを u_a とすれば、 $\varepsilon_\theta = u_r / a$ より u_a は次式で与えられる。

$$u_r = -\frac{2p_0 ab^2}{\gamma_1 (b^2 - a^2)} \left\{ 1 - \frac{\gamma}{\gamma_1} \exp\left(-\frac{\gamma}{\eta} t\right) \right\} \quad (4)$$

$a = 1m$, $b = 10m$, $p_0 = 50 \text{ kgf/cm}^2$, $\gamma_1 = 7.5 \times 10^3 \text{ kgf/cm}^2$, $\gamma_2 = 1.5 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2$, $\eta = 2.0 \times 10^9 \text{ poise}$ の場合について試算してみれば、図-5に示すような変位の経時変化の様態が得られる。

4. まとめ

本研究では、Zener モデルを用いたクリープ関数の導出とその基礎的な検討にとどまったが、今後はこのZener モデルを用いた有限要素法による粘弾性解析プログラムを構築し、トンネル支保工の設計とその施工時期に関する研究に応用・展開して行く所存である。

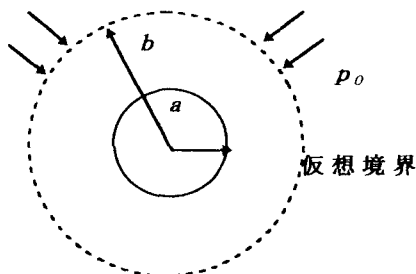


図-4 解析モデル

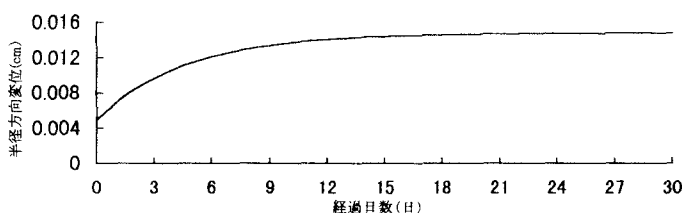


図-5 変位の経時変化

参考文献

- 1) C.Zener: Elasticity and Anelasticity of Metals, The Univ. of Chicago Press, 1948
- 2) 西松裕一, 山口梅太郎: 岩石力学入門, 東京大学出版会, 1977.1
- 3) 土木学会: トンネルにおける調査計測の評価と利用, 1987.9