密度成層乱流場における渦動拡散係数のモデル化

九州大・総理工　学生員○中平伸治　正員　杉原裕司
正員　松永信博

1.はじめに

渦動拡散係数は一般に2次のテンソル量であるが，その乱流モデルは確立していない。本研究では，密度成層場における浮力の非等方効果を考慮した渦動拡散係数テンソルのモデル化を行ったので，その結果について報告する。なお，定式化で用いるテンソル表記において，( )内の添字に関しては総和規則を取らないものとする。

2.乱流密度フラックスの定式化

先ず，密度ρを次のようなアンサンブル平均$\overline{\rho}$とそれからの偏差ρ'の和で表すことにする。

$$\rho = \overline{\rho} + \rho' \tag{1}$$

今，基準密度をρ_0，x_i方向$(i = 1.2.3)$の重力加速度をg_i，乱れエネルギーをk，エネルギー散逸率をϵとし，変動流速u_i'を浮力速度スケール$\frac{\rho'}{\rho_0}g_i k/\epsilon$を用いて次式のようにTaylor展開する。

$$u_i' = u_i^{(0)} + A_{ij}^{(1)}\frac{k}{\epsilon}\frac{\rho'}{\rho_0}g_j + A_{ijk}^{(2)}\frac{k^2}{\epsilon^2}\frac{\rho'^2}{\rho_0^2}g_j g_k + \ldots \tag{2}$$

ここで，0次項は等方的な渦動成分を，1次以上の高次項は浮力変動に起因した非等方的な変動成分を示す。本定式化ではモデルの簡単化のため，$\frac{\rho'}{\rho_0}g_i k/\epsilon$を微小量として，式(2)の展開の2次以上の項を省略する。また，$A_{ij}^{(1)}$については等方テンソルになることを仮定して，次式のようにモデル化する。

$$A_{ij}^{(1)} = C_{s1}\delta_{ij} \tag{3}$$

ここで，C_{s1}はモデル定数であり，δ_{ij}はクロネッカーのデルタ記号を示す。以上より，式(2)は次式のように簡単化される。

$$u_i' = u_i^{(0)} + C_{s1}\frac{k}{\epsilon}\frac{\rho'}{\rho_0}g_i \tag{4}$$

式(4)の両辺にρ'を掛けてアンサンブル平均を取ると，

$$\overline{u_i'\rho'} = \overline{u_i^{(0)}\rho'} + C_{s1}\frac{k}{\epsilon}\frac{g_i}{\rho_0}\overline{\rho'^2} \tag{5}$$

が得られる。次に，変動密度の2次の相関$\overline{\rho'^2}$のモデル化を考える。今，0次の渦動成分が浮力変動成分よりも十分に大きく，密度の変動特性が慣性小領域のスペクトルに従うものと仮定する。変動密度に関する慣性小領域のエネルギースペクトル$E(\tilde{k})$は，

$$E(\tilde{k}) = A_\rho \epsilon_\rho \epsilon^{-\frac{1}{3}}\tilde{k}^{-\frac{5}{3}} \tag{6}$$

で表される[1)]。ここで，$\tilde{k}$は波数，ϵ_ρは$\overline{\rho'^2}$の散逸率，A_ρはスペクトル定数である。密度変動のエネルギー方程式において生成項と散逸項がバランスしていると仮定すれば，ϵ_ρは次式のように表される。

$$\epsilon_\rho = -\overline{u_j'\rho'}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_j} \tag{7}$$

ϵは波数空間において近似的に保存されているものと仮定し，$\tilde{k}_e(\equiv 2\pi/l_e) \sim \infty$の領域に密度変動エネルギーの大部分が含まれているものとする。ここで，l_eは$A_l k^{\frac{3}{2}}/\epsilon$で表されるエネルギー保有渦のスケールで$A_l$は定数である。式(6)をその波数領域で積分し，式(7)を用いると次式が得られる。

$$\begin{aligned}\overline{\rho'^2} &= A_\rho\epsilon_\rho\epsilon^{-\frac{1}{3}}\int_{\tilde{k}_e}^{\infty}\tilde{k}^{-\frac{5}{3}}d\tilde{k} \\ &= \frac{3}{2}A_\rho\epsilon_\rho\epsilon^{-\frac{1}{3}}\tilde{k}_e^{-\frac{2}{3}} = -B_\rho\frac{k}{\epsilon}\overline{u_j'\rho'}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_j}\end{aligned} \tag{8}$$

ただし，B_ρは定数である。式(8)を式(5)に代入すると，乱流密度フラックスは次のようになる。

$$\overline{u_i'\rho'} = \overline{u_i^{(0)}\rho'} - C_{s2}\frac{k^2}{\epsilon^2}\frac{g_i}{\rho_0}\overline{u_j'\rho'}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_j} \tag{9}$$

ここで，C_{s2}はモデル定数である。式(9)中の$\overline{u_i^{(0)}\rho'}$は等方的な渦動成分による密度フラックスであることから，Reynoldsの相似則が適用できるものとして次式で表す。

$$\overline{u_i^{(0)}\rho'} = -\frac{\nu_t}{\sigma_t}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_i} \tag{10}$$

ただし，σ_tはモデル定数であり，ν_tは次式で定義される渦動粘性係数である。

$$\nu_t = C_\mu\frac{k^2}{\epsilon} \tag{11}$$

ここで，モデルの簡単化と式(2)で省略された高次項の効果を低次項へ取り込むために浮力変形を受けるkとϵを用いている。また，C_μはモデル定数である。式(9)へ式(10)を代入すると次式が得られる。

$$\overline{u_i'\rho'} = -\frac{\nu_t}{\sigma_t}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_i} - C_{s2}\phi_{ij}\overline{u_j'\rho'} \tag{12}$$

ただし，ϕ_{ij}は次のように定義されている。

$$\phi_{ij} \equiv \left(\frac{N_{ij}k}{\epsilon}\right)^2, \quad N_{ij} \equiv \sqrt{\frac{g_i}{\rho_0}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_j}} \tag{13}$$

$\phi_{(i)(i)}$および$N_{(i)(i)}$は，それぞれx_i方向の乱流Richardson数，局所浮力振動数を示す。式(12)の連立方程式を解くことにより，本モデルの乱流密度フラックスは次式のように定式化される。

$$\overline{u_i'\rho'} = -\frac{\nu_t}{\sigma_t}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_i} + \frac{C_{s2}\phi_{ij}}{1 + C_{s2}\phi_{kk}}\frac{\nu_t}{\sigma_t}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_j} \tag{14}$$

また，式(14)は式(13)の定義を用いて次式のように変形できる。

$$\overline{u_i'\rho'} = -\frac{\nu_t}{\sigma_t}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_i} + \alpha_i\frac{\nu_t}{\sigma_t}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_j}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_j} \quad (15)$$

ただし，α_iは次式のように定義されている。

$$\alpha_i \equiv \frac{C_{s2}}{1+C_{s2}\phi_{kk}}\frac{k^2}{\epsilon^2}\frac{g_i}{\rho_0} \quad (16)$$

従来型のフラックスは式(15)の右辺第1項のみで表されているが，本モデルのそれは密度勾配の2次の項を含んでいる。このように，本モデルの密度フラックスは密度勾配に関して非線形表示されていることが大きな特徴である。

3.渦動拡散係数の定式化

次に渦動拡散係数の定式化を行う。一般に乱流密度フラックスは，次のような勾配拡散形式で表現されることが多い。

$$\overline{u_i'\rho'} = -K_{ij}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_j} \quad (17)$$

ここで，K_{ij}は渦動拡散係数テンソルである。式(17)で表せること自体は，直接式(15)の線形近似を意味しない。何故なら，非線形表示されたフラックスを形式的に式(17)の勾配拡散形式へ書き換えられる場合があるからである。本モデルの乱流密度フラックスは非線形表示されたモデルであるが，形式的に式(17)の形で表される。ただし，K_{ij}については形式的に対称，非対称のどちらのテンソルでも表示可能である。ここでは有用性を考慮してK_{ij}を対称テンソルの形で定式化する。

式(15)の乱流密度フラックスを式(17)の形で表現した場合，K_{ij}は一般に次のような形で表示される。

$$K_{ij} = \frac{\nu_t}{\sigma_t}\begin{bmatrix} 1-\beta_{11k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k} & -\beta_{12k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k} & -\beta_{13k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k} \\ -\beta_{21k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k} & 1-\beta_{22k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k} & -\beta_{23k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k} \\ -\beta_{31k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k} & -\beta_{32k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k} & 1-\beta_{33k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k} \end{bmatrix} \quad (18)$$

ただし，式(18)は対称テンソルであるから，$\beta_{ijk}=\beta_{jik}$となる。従ってβ_{ijk}の未知数は18である。式(17)，(18)から構成されるフラックス$\overline{u_1'\rho'}$，$\overline{u_2'\rho'}$，$\overline{u_3'\rho'}$は式(15)のそれと等しいことから，次式が得られる。

$$\left(1-\beta_{11k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_1} - \beta_{12k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_2} - \beta_{13k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_3} = \left(1-\alpha_1\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_1} - \alpha_1\left(\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_2}\right)^2 - \alpha_1\left(\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_3}\right)^2 \quad (19a)$$

$$-\beta_{21k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_1} + \left(1-\beta_{22k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_2} - \beta_{23k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_3} = -\alpha_2\left(\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(1-\alpha_2\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_2} - \alpha_2\left(\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_3}\right)^2 \quad (19b)$$

$$-\beta_{31k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_1} - \beta_{32k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_2} + \left(1-\beta_{33k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_3} = -\alpha_3\left(\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_1}\right)^2 - \alpha_3\left(\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_2}\right)^2 + \left(1-\alpha_3\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_3}\right)\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_3} \quad (19c)$$

式(19a)〜(19c)より，次のような連立方程式が得られる。

$$\left.\begin{array}{lll} \beta_{111}=\alpha_1, & \beta_{112}+\beta_{121}=0, & \beta_{113}+\beta_{131}=0 \\ \beta_{211}=\alpha_2, & \beta_{212}+\beta_{221}=0, & \beta_{213}+\beta_{231}=0 \\ \beta_{311}=\alpha_3, & \beta_{312}+\beta_{321}=0, & \beta_{313}+\beta_{331}=0 \\ \beta_{122}=\alpha_1, & \beta_{123}+\beta_{132}=0, & \beta_{133}=\alpha_1 \\ \beta_{222}=\alpha_2, & \beta_{223}+\beta_{232}=0, & \beta_{233}=\alpha_2 \\ \beta_{322}=\alpha_3, & \beta_{323}+\beta_{332}=0, & \beta_{333}=\alpha_3 \end{array}\right\} \quad (20)$$

$\beta_{ijk}=\beta_{jik}$を用いて上記の連立方程式を解くと，

$$\left.\begin{array}{c} \beta_{111}=\alpha_1, \quad \beta_{222}=\alpha_2, \quad \beta_{333}=\alpha_3 \\ \beta_{112}=-\alpha_2, \quad \beta_{113}=-\alpha_3, \quad \beta_{221}=-\alpha_1 \\ \beta_{223}=-\alpha_3, \quad \beta_{331}=-\alpha_1, \quad \beta_{332}=-\alpha_2 \\ \beta_{211}=\beta_{121}=\alpha_2, \quad \beta_{311}=\beta_{131}=\alpha_3 \\ \beta_{322}=\beta_{232}=\alpha_3, \quad \beta_{122}=\beta_{212}=\alpha_1 \\ \beta_{133}=\beta_{313}=\alpha_1, \quad \beta_{233}=\beta_{323}=\alpha_2 \\ \beta_{123}=\beta_{132}=\beta_{231}=\beta_{213}=\beta_{312}=\beta_{321}=0 \end{array}\right\} \quad (21)$$

が得られる。従って，式(13)，(16)，(18)，(21)より，密度成層乱流場における渦動拡散係数テンソルが次式のように定式化される。

$$K_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\nu_t}{\sigma_t}\left[1+\dfrac{C_{s2}\left(\phi_{ll}-2\phi_{(i)(i)}\right)}{1+C_{s2}\phi_{kk}}\right] & for\ i=j \\ -\dfrac{\nu_t}{\sigma_t}\left[\dfrac{C_{s2}\left(\phi_{ij}+\phi_{ji}\right)}{1+C_{s2}\phi_{kk}}\right] & for\ i\neq j \end{cases} \quad (22)$$

4.おわりに

本研究では，密度成層乱流場における渦動拡散係数を2次のテンソルの形で定式化した。この拡散係数テンソルは，乱流Richardson数の関数になっており，乱流密度フラックスは密度勾配に関して非線形表示されている。また，定式化におけるクロージャーの基本量としてk，ϵおよび局所浮力振動数テンソルN_{ij}を用いていることから，本研究の渦動拡散係数をk-ϵ型の2方程式モデルと連立させることにより密度成層乱流場をシミュレートできる。

謝辞：本研究を行うにあたり，九州大学名誉教授粟谷陽一先生ならびに九州大学工学部教授小松利光先生に貴重なご助言を頂きました。記して謝意を表します。

参考文献

1) Phillips, O.M. : The dynamics of the upper ocean. 2nd edn., Cambridge Univ. Press, 1977