

一般座標系における二次元非定常流の数値計算

九州工業大学工学部 学生員 ○山口 学、高崎 美智恵
同 上 正 員 秋山 壽一郎、浦 勝

1. はじめに

本研究は、MacCormack法にJamesonの人工粘性と4ステップアルゴリズムを組み込んだ一般座標系における平面2次元非定常流数値モデルを構築し、連続湾曲部の流れに関する既存の実験結果⁽¹⁾と比較検討を行ない、その予測精度について定量的に調べたものである。

2. 数値モデル

2次元浅水方程式の保存形の連続の式および運動方程式は、式(1)で与えられる。

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + \frac{\partial E'}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial y} + S' = 0 \quad (1)$$

$$\text{ただし、} U' = \begin{bmatrix} h \\ u^x h \\ u^y h \end{bmatrix}; E' = \begin{bmatrix} u^x h \\ (u^x)^2 h + 0.5gh^2 \\ u^x u^y h \end{bmatrix}; F' = \begin{bmatrix} u^y h \\ u^x u^y h \\ (u^y)^2 h + 0.5gh^2 \end{bmatrix}; S' = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(S'_{0x} - S'_{fx}) \\ -gh(S'_{0y} - S'_{fy}) \end{bmatrix}$$

ここに、 x, y = 流下方向、横断方向距離、 h = 水深、 u^x, u^y = x, y 方向の流速、 g = 重力加速度、 S'_{0x}, S'_{0y} = x, y 方向の河床勾配、 S'_{fx}, S'_{fy} = x, y 方向の摩擦勾配であり、それぞれ式(2)のように与えられる。ここに、 n = Manningの粗度係数である。

$$S'_{fx} = \frac{n^2 u^x \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}}; S'_{fy} = \frac{n^2 u^y \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}} \quad (2)$$

物理面(x, y)を直交直線座標、写像面(φ, ϕ)を一般曲線座標として、直交直線座標系における2次元浅水方程式を一般曲線座標系に変換すると式(3)のようになる。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial \varphi} + \frac{\partial C}{\partial \phi} = D_\varphi + D_\phi \quad (3)$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} \frac{h}{J} \\ \frac{u^x h}{J} \\ \frac{u^y h}{J} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \frac{u^x h}{J} \\ \frac{1}{J} \left(u^x u^x h + \frac{\varphi_x}{2} gh^2 \right) \\ \frac{1}{J} \left(u^y u^x h + \frac{\varphi_y}{2} gh^2 \right) \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} \frac{u^y h}{J} \\ \frac{1}{J} \left(u^x u^x h + \frac{\phi_x}{2} gh^2 \right) \\ \frac{1}{J} \left(u^y u^x h + \frac{\phi_y}{2} gh^2 \right) \end{bmatrix}; D_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} gh(SX_{0\varphi} - SX_{f\varphi}) \\ \frac{1}{J} gh(SY_{0\varphi} - SY_{f\varphi}) \end{bmatrix}; D_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} gh(SX_{0\phi} - SX_{f\phi}) \\ \frac{1}{J} gh(SY_{0\phi} - SY_{f\phi}) \end{bmatrix}$$

ここに、

$$SX_{0\varphi} = -\varphi_x \frac{\partial z_b}{\partial \varphi}; SX_{0\phi} = -\phi_x \frac{\partial z_b}{\partial \phi}; SX_{f\varphi} = \frac{\varphi_y}{J} u^x \frac{n^2 \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}}; SX_{f\phi} = -\frac{\varphi_x}{J} u^y \frac{n^2 \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}} \\ SY_{0\varphi} = -\varphi_y \frac{\partial z_b}{\partial \varphi}; SY_{0\phi} = -\phi_y \frac{\partial z_b}{\partial \phi}; SY_{f\varphi} = -\frac{\phi_x}{J} u^x \frac{n^2 \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}}; SY_{f\phi} = \frac{\varphi_y}{J} u^y \frac{n^2 \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}}$$

また、 J は座標変換のヤコビアンで式(4)のように与えられる。

$$J = \varphi_x \phi_y - \varphi_y \phi_x \quad (4)$$

MacCormack法は、予測子段階と修正子段階より成る2段階ステップの2次精度スキームであり、4ステップアルゴリズムを組み込んだ任意の計算時間ステップは表1のように表される。

表1 4ステップアルゴリズム

第1ステップ	ψ 方向: 前進→後退	第2ステップ	ψ 方向: 前進→後退
	ϕ 方向: 前進→後退		ϕ 方向: 後退→前進
第3ステップ	ψ 方向: 後退→前進	第4ステップ	ψ 方向: 後退→前進
	ϕ 方向: 後退→前進		ϕ 方向: 前進→後退

また、数値振動を抑えるため、式(5)、(6)に示すJameson^[2]の人工粘性係数kを用いた。

$$\xi_{i,j}^x = \frac{|h_{i+1,j} + 2h_{i,j} + h_{i-1,j}|}{|h_{i+1,j}| + |2h_{i,j}| + |h_{i-1,j}|} \quad ; \quad \xi_{i,j}^y = \frac{|h_{i,j+1} + 2h_{i,j} + h_{i,j-1}|}{|h_{i,j+1}| + |2h_{i,j}| + |h_{i,j-1}|} \quad (5)$$

$$\xi_{i+1/2,j}^x = k \max(\xi_{i,j}^x, \xi_{i+1,j}^x) \quad ; \quad \xi_{i+1/2,j}^y = k \max(\xi_{i,j}^y, \xi_{i+1,j}^y) \quad (6)$$

3. 解析結果

蛇行水路の概要と湾曲部の単位形状をそれぞれ図1、2に示す。計算においては、上・下流端の全幅にわたって開境界として流入・流出を行い、上流端の流入条件として流量 $Q=1.96(l/s)$ を与えた。その他の計算条件は、Manningの粗度係数 $n=0.010$ 、河床勾配 $S_{ax}=0.001$ 、初期水深 $h=0.02m$ 、格子間隔 $\Delta x=0.025m$ 、 $\Delta y=0.025m$ 、Courant数 $Cr=0.5$ 、人工粘性係数 $k=0.3$ である。

図3～6は、連続湾曲部における水深 h と断面平均主流速 u^x を実験値⁽¹⁾と比較した一例である。図中のデータは同位相の平均値である。断面平均主流速については、壁面付近において若干の違いが見られるものの、全体的に実験値を良好に再現している。また水面形状については、実験値と計算値はほぼ一致している。よって、本モデルは2次元モデルであるが、ある程度の蛇行度を有する蛇行流を良好に再現できることがわかった。

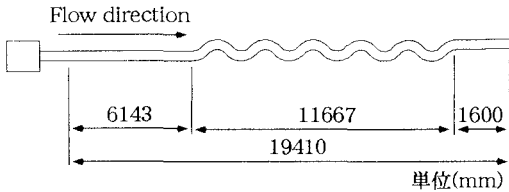


図1 蛇行水路の概要図⁽¹⁾

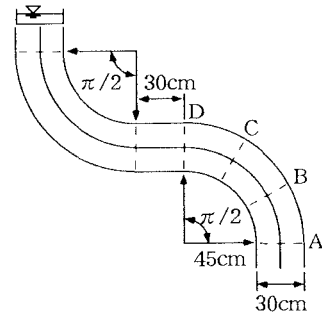


図2 湾曲部の単位形状図

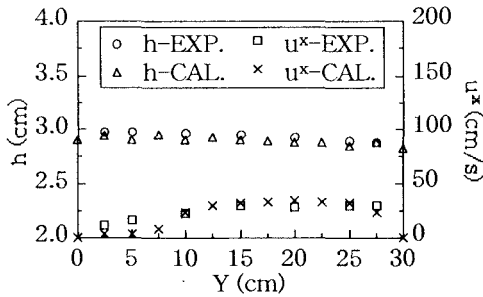


図3 水深と断面主流速の比較図(A断面)

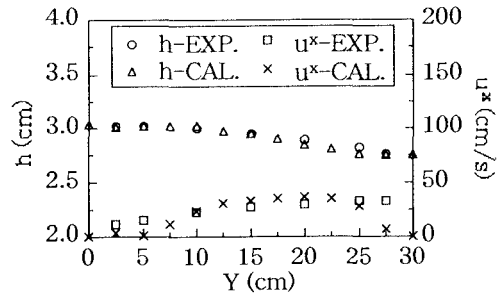


図4 水深と断面主流速の比較図(B断面)

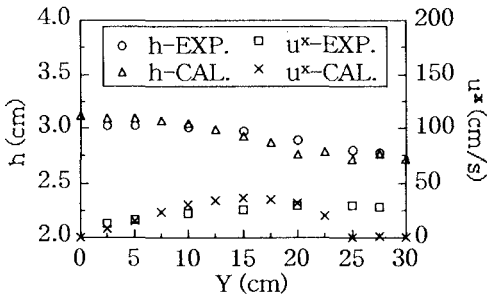


図5 水深と断面主流速の比較図(C断面)

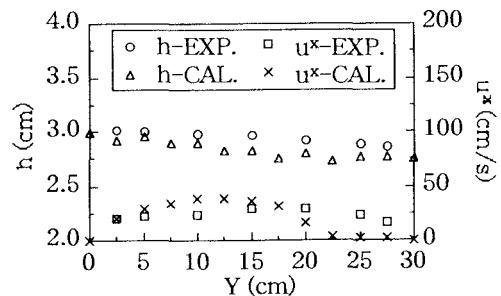


図6 水深と断面主流速の比較図(D断面)

参考文献：【1】玉井ら(1983)、土木学会論文集、第331号、【2】Jameson et al.(1971)、AIAA 14th Conf.