

面内分布曲げ荷重を受ける片持ち長方形板の振動、座屈および動的安定

長崎大学工学部 学生員 ○中澤聡志

長崎大学大学院 学生員 呉 明強

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

1. まえがき

一般に、はりに面内曲げ荷重が作用する場合、横倒れ座屈が生じることが知られており、はりの長さが短い場合や高さが高い場合には、平板として取り扱うことが必要である。著者らは、一連の研究で、平板の動的安定問題を順次解決¹⁾しており、本研究では面内分布曲げ荷重が作用する場合の片持ち長方形板の振動、座屈および動的安定を解析する。解法として、振動および座屈解析には、Rayleigh-Ritz 法により解析を行い、動的安定解析は、Hamilton の原理を用いて動的安定問題の運動方程式を誘導し、行列の固有値問題に変換して解析を行う。

2. 解法¹⁾

(1)座屈および固有振動解析 静的分布荷重 $p_0(x)$ による面内力 N_x, N_y , N_{xy} を受ける場合の長方形板の自由振動を考える (図-1)。ひずみエネルギー V 、面内力によるエネルギー U および運動エネルギー T は次のように与えられる²⁾。

$$\left. \begin{aligned} V(w) &= \frac{1}{2} D \iint_A \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \\ U(w) &= \frac{1}{2} \iint_A \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ T(w) &= \frac{\rho}{2} h \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \end{aligned} \right\} \cdots (1)$$

ここに、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$: 板剛度, E : ヤング率, ν : ポアソン比,
 h : 板厚, ρ : 板の密度, w : たわみ, t : 時間, a, b : 辺長.

たわみの一般解を式(2)のように仮定して、全ポテンシャルエネルギー ($\Pi = V + U - T$) に Rayleigh-Ritz 法を適用し、行列表示すると式(3)のようになる。

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} h_m(\xi) \bar{h}_n(\eta) \exp(i\omega t) \cdots (2) \quad ([E] - \lambda_v^4 [F] + \lambda_b \bar{p}_0 [G]) \{X\} = \{0\} \cdots (3)$$

ここに、 $h_m(\xi)$: 片持ちばりの固有振動形, $\bar{h}_n(\eta)$: 両端自由ばりの固有振動形, $\xi = x/a$, $\eta = y/b$,
 ω : 固有円振動数, λ_v : 振動固有値, λ_b : 座屈固有値, $\bar{p}_0 = p_0/p_{cr}$, $[E], [F], [G]$: 係数行列,
 $\{X\} = \{A_{11}, A_{12}, \dots, A_{MN}\}^T$.

式(3)で $\lambda_b = 0$ とすれば、面内力が作用しない場合の自由振動の固有値 λ_v が得られ、また、慣性項を無視すれば、座屈固有値 λ_b ($\bar{p}_0 = 1.0$ のとき) が得られる。

(2)動的安定解析 静的分布荷重 $p_0(x)$ および周期的変動荷重 $p_1(x) \cos \Omega t$ が作用する場合を考え、たわみを次のように仮定する。

$$w = \sum_{m=1} \sum_{n=1} T_{mn}(t) W_{mn}(\xi, \eta) \cdots (4)$$

ここに、 $T_{mn}(t)$: 未知の時間関数, $W_{mn}(\xi, \eta)$: 片持ち長方形板の固有振動形。

Hamilton の原理を適用し、一般座標に関する運動方程式を誘導して行列表示すると Mathieu の方程式で次のように表わされる。

$$[I]\{\ddot{T}\} + [F]\{T\} + (\bar{p}_0 + \bar{p}_1 \cos \bar{\omega} \tau)[G]\{T\} = \{0\} \cdots (5)$$

ここに、 $[I]$: 単位行列, $[F]$: 固有振動数の自乗が対角に並んだ対角行列, $[G]$: 係数励振行列, $\bar{p}_1 = p_1/p_{cr}$,

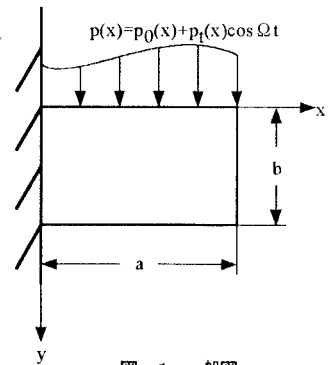


図-1 一般図

$\bar{\omega} = \Omega/\omega_{11}$: 無次元励振振動数, $\tau = \omega_{11}t$: 無次元時間, ω_{11} : 最低次の固有振動数.

式(6)の一般解をフーリエ級数を使って仮定し, 調和バランス法により2倍サイズの固有値問題に変換して, 系の安定性を評価する.

3. 板に作用する面内力²⁾

図-1に示すような片持ち長方形板に作用する面内分布曲げ荷重として, 本研究では次の2ケースを考える. 各ケースの面内力を求めると次式の結果となる.

$$\begin{aligned} \text{CASE 1 等分布荷重 } p &= p_0 + p_t \cos \Omega t & \text{CASE 2 三角形分布荷重 } p(x) &= (p_0 + p_t \cos \Omega t)(1 - x/a) \\ \left. \begin{aligned} N_x &= ph \left[-6(a-x)^2 \frac{(y-b/2)}{b^3} + \frac{b^2}{5} \left\{ \frac{20(y-b/2)^3}{b^3} - \frac{3(y-b/2)}{b^3} \right\} \right] \\ N_y &= -2ph \left\{ \frac{(y-b/2)^2}{b^3} - \frac{3(y-b/2)}{4b} + \frac{1}{4} \right\} \\ N_z &= -2ph(a-x) \left\{ \frac{3(y-b/2)^2}{b^3} - \frac{3}{4b} \right\} \end{aligned} \right\} \cdots (6) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} N_x &= ph \left\{ \frac{2(a-x)^2(b/2-y)}{b^3} - \frac{4(a-x)(b/2-y)}{b^3} + \frac{3(a-x)(b/2-y)}{5b} \right\} \\ N_y &= ph \left\{ -\frac{3(a-x)(b/2-y)}{2b} + \frac{2(a-x)(b/2-y)}{b^3} - \frac{(a-x)}{2} \right\} \\ N_z &= ph \left\{ \frac{3(a-x)^2}{4b} - \frac{3(a-x)^2(b/2-y)}{b^3} + \frac{b}{80} + \frac{(b/2-y)^4}{b^3} + \frac{3(b/2-y)}{10b} \right\} \end{aligned} \right\} \cdots (7)$$

4. 解析結果

(1) 座屈特性 文献¹⁾と同様に縦横比が大きくなるにしたがつて, 座屈固有値は小さくなる. 図-2に示すような座屈モードが得られる. 両端自由方向(y方向)の座屈波形は荷重が載荷している側が大きい.

(2) 振動特性 固有振動数は静的分布荷重の増加に伴って減少する. さらに, 次数が小さいほど著しく減少する傾向があり, 1次固有振動は座屈荷重 $\bar{p}_0 = 1$ で固有振動数が0になる.

(3) 動的不安定領域 CASE 1, 2とも係数励振行列[G]には0要素がなく, すべての振動モードの組合せによる結合共振の不安定領域が存在する. 図-3に示すように, 動的不安定領域 (CASE 2, $\beta=1.0$, $\bar{p}_0=1.0$) には単純共振 ω_j と結合共振 $\omega_j + \omega_m$ が得られ, 結合共振の不安定領域の幅は単純共振の幅にくらべ, 広い. また, CASE 1よりもCASE 2のほうが, 動的不安定領域の種類が多い. 結合共振はy方向の次数の近い固有振動数の組み合わせが多く現れ, 逆に離れた組み合わせは生じない. 静的荷重 $\bar{p}_0$ が大きくなると動的不安定領域の種類が増加し, 動的不安定領域の幅が広がる. 動的安定解析の精度を確かめるため, Runge-Kutta-Gill 法による数値シミュレーションを行ったところ, 動的安定解析による動的不安定領域の幅が一致することを確認している. このことから, 動的安定解析の精度は十分であることが明らかになった.

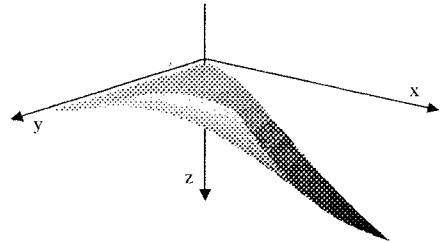


図-2 座屈モード (CASE 1, $\beta=1.0$)

5. まとめ

本研究は, 2ケースの面内分布曲げ荷重を受ける片持ち長方形板の振動, 座屈および動的安定の解析を行い, それらの特性を比較したものである. 自由端に集中荷重が作用する場合の結果との比較は講演時に発表する.

参考文献 1) 高橋, 呉: 構造工学論文集, Vol.43A, 1997.3 (掲載予定)

2) 関谷壮, 斎藤渥: 薄板構造力学, 共立出版, 1968

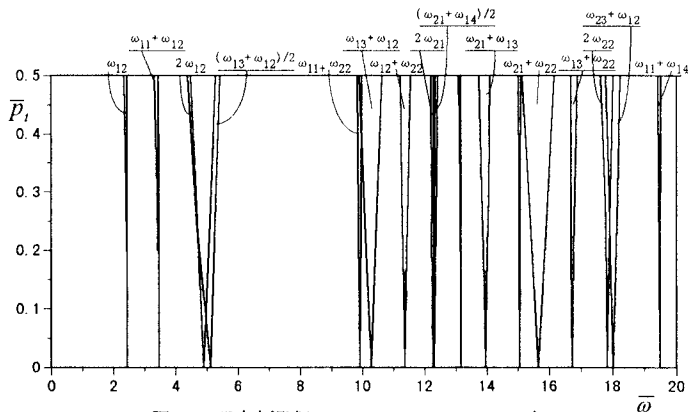


図-3 不安定領域 (CASE 2, $\beta=1.0$, $\bar{p}_0=0.0$)