

周期的な支点変位を受ける偏平ケーブルの応答解析

長崎大学大学院 学生員 ○ HERATH, M.C.R.

長崎大学工学部 正 員 高橋 和雄

長崎大学大学院 学生員 花田 博史

1. まえがき

斜張橋などのケーブルの係数励振振動は、支点の移動による付加張力の変動によって生ずる。著者らは周期的な支点移動によるケーブルの係数励振振動の解析を行っている¹⁾。しかし、解析的手法ではなく数値シミュレーションによる解を求めている。その後の検討で解析的に取り扱えることが判明してきた。

本研究では偏平ケーブルの支点が軸方向に動きうることを考慮した線形運動方程式を1自由度系に変換し、調和バランス法を適用して連立線形代数方程式に変換する。この方程式を用いて周期的な支点変動を受ける偏平ケーブルの応答特性を解析的に明らかにする。

2. 運動方程式

ケーブルの左支点のみが水平方向に動きうる偏平ケーブルの線形化した運動方程式は次式となる¹⁾。

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (H_e + H_t \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = K_e H_t \cos \Omega t \quad (1)$$

ここに、 w : 垂直方向変位、 t : 時間、 m : ケーブルの単位長さ当たりの質量、 H_e : 初期水平張力、 H_t : 変動水平張力の振幅、 $K_e = 8f/l^2$: 放物線ケーブルの曲率、 f : ケーブルのサグ、 l : ケーブルのスパン、 Ω : 変動水平張力の円振動数。

3. 解法

(1) 常微分方程式への変換

式(1)の解を次のように仮定する。

$$w = T(t)W(x) \quad (2)$$

ここに、 $T(t)$: 未知の時間関数、 $W(x)$: 境界条件を満足する座標関数。

座標関数 $W(x)$ として、支点が動きうるケーブルの固有振動形を用いると、式(1)で $H_t = 0$ とした固有振動解析により得られる。すなわち、

$$W(x) = \sin(\pi x/l) \quad (3)$$

つまり、支点が動きうる場合のケーブルの固有振動形はサグ比に無関係に弦の固有振動形と同じ正弦波で与えられる。また、固有振動数もサグ比に無関係に弦の固有振動数と一致する。

式(1)に式(2)を代入した方程式に Galerkin 法を適用して離散化した後、線形減衰力を考慮すると次式が得られる。

$$\ddot{T} + 2h\omega_1 \dot{T} + \omega_1^2 (1 + \bar{H}_t \cos \bar{\omega} \tau) T + \frac{32}{\pi^3} \gamma \bar{H}_t \cos \bar{\omega} \tau = 0 \quad (4)$$

ここに、 $\omega_1 = n_1/n_0 = 10$: 第1次の無次元固有円振動数、 $n_0 = \pi/l \sqrt{H_e/m}$: 弦の第1次の固有円振動数、 n_1 : ケーブルの第1次固有円振動数、 $\gamma = f/l$: サグ比、 $\bar{\omega} = \Omega/n_0$: 無次元加振円振動数、 $\tau = n_0 t$: 無次元時間、 $\bar{H}_t = H_t/H_e$: 変動軸力の無次元振幅、 h : 減衰定数。

(2) 解の性質

式(4)の運動方程式は、変動軸力の項(第4項)と強制力の項(第5項)を含む。したがって、強制力の項から生ずる付随型の応答と変動軸力の項から生ずる分岐応答が存在する。式(4)は1自由度であるから不安定振動は単純共振のみで、励振振動数が系の固有振動数の2倍の整数分の1付近で生じる。すなわち、

$$\bar{\omega} = 2\omega_1/k \quad (5)$$

ここで、 $k = 1, 2, 3, \dots$ 、 $k=1$: 主不安定領域、 $k \geq 2$: 副不安定領域。

(3) 付随型の応答

文献1より固有円振動数 ω_1 の1, 1/2, 1/3, 1/4および1/5, ..., 倍付近に付随型の応答が生じていることから、これに対応する $k = 2, 4, 6, 8, 10, \dots$ の第1, 3, 5, 7, 9, ..., 副不安定領域および強制外力による付随応答を求めるために、周期解を次式で仮定する($k=10$ の場合)。

$$T = \frac{c_0}{2} + c_1 \cos \bar{\omega} \tau + s_1 \sin \bar{\omega} \tau + c_2 \cos 2\bar{\omega} \tau + s_2 \sin 2\bar{\omega} \tau + c_3 \cos 3\bar{\omega} \tau + s_3 \sin 3\bar{\omega} \tau + c_4 \cos 4\bar{\omega} \tau + s_4 \sin 4\bar{\omega} \tau + c_5 \cos 5\bar{\omega} \tau + s_5 \sin 5\bar{\omega} \tau \quad (6)$$

ここに、 $c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, c_3, s_3, c_4, s_4, c_5, s_5$: 付随調波成分。

式(6)を式(4)に代入し調和バランス法を適用すれば 11 個の線形連立代数方程式が得られる。それらを解けば、各振幅成分が得られ、式(6)から応答 T が求められる。

(4)分岐型の応答

分岐型の応答の不安定領域の境界を求める。

(a) $k=1$ の主不安定領域

式(4)の解を次のように仮定する。

$$T = c_{1/2} \cos \frac{1}{2} \bar{\omega} \tau + s_{1/2} \sin \frac{1}{2} \bar{\omega} \tau \quad (7)$$

ここに、 $c_{1/2}, s_{1/2}$: 分岐調波成分。

調和バランス法を適用すると 2 個の連立代数方程式が得られ、それらを解くと次の条件式が得られる。

$$\bar{\omega}^2 = 4\omega_1^2 - 8h^2\omega_1^2 \pm 2\omega_1^2 \sqrt{\bar{H}_l^2 - 16h^2 + 16h^4} \quad (8)$$

式(8)の $\bar{\omega}$ を求めることによって主不安定領域の境界線を得ることができる。

(b) $k=3,5,7,\dots$ の副不安定領域

(a)と同様に解を次のように仮定する。

$$T = c_{k/2} \cos \frac{k}{2} \bar{\omega} \tau + s_{k/2} \sin \frac{k}{2} \bar{\omega} \tau \quad (9)$$

ここに、 $c_{k/2}, s_{k/2}$: 分岐調波成分 ($k=3,5,7,\dots$)、

(a)と同様に条件式を求めると、次式となる。

$$\bar{\omega}^2 = \left\{ 4\omega_1^2 (1 - 2h^2 \pm 2h\sqrt{h^2 - 1}) \right\} / k^2 \quad (10)$$

式(10)より減衰定数 h が $0 < h < 1$ ならば $\bar{\omega}$ は虚数となる

ため、分岐応答は発生しない。したがって、本ケースでは副不安定領域は存在しない。

4. 解析結果

図 - 1 は、無次元変動軸力の振幅 $\bar{H}_l = 0.3$ 、減衰定数 $h = 0.005$ の場合の応答振幅と無次元加振円振動数との関係をサグ比をパラメータに示している。縦軸はスパン長で無次元化したケーブルの中央点の無次元応答振幅、横軸は弦の 1 次の固有円振動数で無次元化した無次元加振円振動数である。また、サグ比 $\gamma = 0.01$ の場合の数値シミュレーションの値を○でプロットしている。解析解とシミュレーション解は完全に一致する。したがって、解析解の精度は十分である。サグ比が大きくなると、それに比例して強制力も増すために応答振幅が大きくなる。固有円振動数 $\omega_1 = 1.0$ 付近では、変動軸力による第 1 副不安定領域 ($k=2$) と強制振動による主共振が連成し、サグ比の大きさに無関係に応答振幅が増大する。なお、 $\bar{\omega} = 2.0$ の主不安定領域はサグ比の影響を受けない。 $\bar{H}_l$ が増えれば不安定領域の発生領域が拡大する。表 - 1 に不安定領域の発生領域と応答の型をまとめる。

5. まとめ

- (1) 支点が動く場合の偏平ケーブルの応答が解析手法で求められ、解析解の精度は十分である。
- (2) 不安定領域には、強制振動による主共振および他の不安定領域と連成した形で現れる付随型と特定の振動数領域で単独に現れる分岐型がある。分岐型の不安定領域は、固有円振動数の 2 倍 ($2\omega_1$) 付近での主不安定領域のみ現れ、分岐型の副不安定領域は現れない。

参考文献

- 1) 高橋和雄・鎌田智之・町田健一郎・松野進, 土木学会論文集, No. 495/I-28, pp. 127~130, 1994. 7.

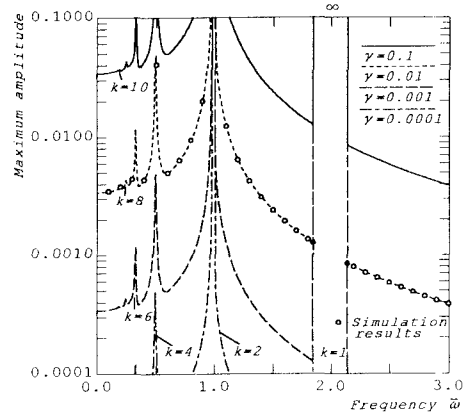


図 - 1 応答曲線 ($\bar{H}_l = 0.3, h = 0.005, \omega_1 = 1.0$)

表 - 1 不安定領域の発生領域

k	Occurrence condition	Response type
1	$\bar{\omega} = 2\omega_1$	bifurcation type
2	$\bar{\omega} = \omega_1$	incidental type
4	$\bar{\omega} = \omega_1/2$	incidental type
6	$\bar{\omega} = \omega_1/3$	incidental type
8	$\bar{\omega} = \omega_1/4$	incidental type
10	$\bar{\omega} = \omega_1/5$	incidental type