

二段階制御法と荷重制御法の組み合わせによる不安定構造解析

熊本大学 学生員○東 高徳
 熊本大学 正 員 小林 一郎
 熊本工業大学 正 員 三池 亮次
 熊本大学 学生員 橋本 淳也

1.はじめに ケーブルは、引張力の作用により剛性を保つ構造であり、外力の作用により構造自体に大きな変形が生じ、また無応力状態では不安定な構造となる。このような不安定なケーブルの静的な大変形解析をおこなう様々な手法が考えられてきた。後藤¹⁾らは接線剛性マトリックスを用い荷重制御法に従って大変形構造解析をおこなっている。我々もさきに無応力の状態で剛性マトリックスが特異で、不安定とならないように以下に述べるような二段階制御法²⁾を提案した。今回はさらにいったん応力が導入されると、安定となるため二段階より荷重制御法にきりかえる二段階制御法と荷重制御法を組み合わせによる方法を提案する。

すなわち第1段階として、不安定次数だけ、ある節点方向に変位(制御変位)を与え静定とする。この制御変位方向の反力を求める。第2段階として、制御変位方向の与えられた外力と、第1段階において得られる制御変位方向の計算反力との不釣り合い力を解消するように、制御変位方向以外の外力の増分は零の条件の下で接線剛性マトリックスの修正と、変位制御法による第2段階増分変位を求める。この時点で部材応力は零ではなくなるので、これ以後はより収斂が早い荷重制御法にきりかえケーブルの釣り合い力を決定する。

また、浮体の運動によるケーブルの運動においては運動の方向が変化するとき不安定となることがある、このとき、二段階制御法に切り替え上述の二段階制御法と荷重制御法の組み合わせにより解析をおこなう。

2.大変形構造解析の基礎式 筆者らは先に有限変位仮想仕事の定理に従って、接線マトリックスを用いた次のような大変形構造解析の基礎式を誘導した。すなわち、変形の間状態の荷重 $\mathbf{P}'$ からの増分荷重 $\Delta \mathbf{P}$ と、変形 $\mathbf{d}'$ からの増分変位 $\Delta \mathbf{d}$ のあいだに

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{d} + \mathbf{b} \quad (1)$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}) \mathbf{K}_m (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})^T \quad (2)$$

$$\mathbf{b} = \Delta \mathbf{C} \mathbf{P}'_m - (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}) \mathbf{K}_m \Delta \mathbf{e}_\theta \quad (3)$$

が成り立つ。ここに $\mathbf{K}$ は変形後の剛性マトリックス、 $\mathbf{b}$ は有限変位に関する補正項であり、 $\mathbf{C}'$ は中間状態における接線マトリックス、 $\Delta \mathbf{C}$ はその増分、 $\mathbf{K}_m$ は応力として軸力の場合には、 $k = EA'_l/L'_l$ を要素とする対角マトリックス、 E はヤング率、 A は断面積、 L は部材長で添字 l は第1部材、プライム l は中間状態における値であることを示す。添字 T は転置記号である。 $\Delta \mathbf{e}_\theta$ は、大変形ひずみの補正項であり、変形の間状態からの部材回転角を $\Delta \theta_l$ とすると、第1部材のひずみ補正項 $\Delta \mathbf{e}_{\theta,1}$ は、 $(1 - \cos \Delta \theta_l) L'_l$ を要素とするベクトルとなる。変形後の接線マトリックス $\mathbf{C} = \mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}$ であり、変形後の断面力 $\mathbf{P}_m$ と $\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \Delta \mathbf{P}$ の間には、次式が成立する。なお、変形後の変位は $\mathbf{d} = \mathbf{d}' + \Delta \mathbf{d}$ である。

$$\mathbf{P} = \mathbf{C} \mathbf{P}_m \quad (4)$$

中間状態における $\Delta \mathbf{P}$ の変分は、

$$\delta \Delta \mathbf{P} = \mathbf{K}_T \delta \Delta \mathbf{d} \quad , \quad \mathbf{K}'_T = \mathbf{K}'_E + \mathbf{K}'_G \quad (5)$$

となる。ここに、 $\mathbf{K}'_E$ 弾性剛性マトリックス、 $\mathbf{K}'_G$ は幾何剛性マトリックス、 $\mathbf{K}'_T$ は接線剛性マトリックスであり、

$$\mathbf{K}'_G = \left[\frac{\partial (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]_{\Delta \mathbf{d}=\mathbf{0}} \mathbf{P}'_m \quad (6)$$

となる。ここに $\left[\frac{\partial (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]$ は立体マトリックスであり、

$$\left[\frac{\partial (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]_{\Delta \mathbf{d}=\mathbf{0}} \mathbf{P}'_m = \left[\frac{\partial (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})}{\partial \Delta d_1} \mathbf{P}'_m \quad \frac{\partial (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})}{\partial \Delta d_2} \mathbf{P}'_m \quad \cdots \right]_{\Delta \mathbf{d}=\mathbf{0}} \quad (7)$$

である。接線マトリックスの場合は、 $\mathbf{C}$ を構成する部材の方向余弦ベクトルの微分として容易に求めることができる。

3. ケーブルの増分形運動式 ケーブルの増分形運動式は、(1)式において（質量×加速度）を慣性力と考えて、これを、外力として左辺に組み込むことによって得られる。計算の第 $I+1$ ステップの加速度ベクトル $\Delta \mathbf{a}_{I+1}$ は第 $I+1$ ステップにおける荷重と変位の増分を $\Delta \mathbf{P}_I, \Delta \mathbf{d}_I$ とすると、

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{a}_{I+1} &= \left\{ \left(\frac{\Delta \mathbf{d}_{I+1}}{\Delta t} - \frac{\Delta \mathbf{d}_I}{\Delta t} \right) - \left(\frac{\Delta \mathbf{d}_I}{\Delta t} - \frac{\Delta \mathbf{d}_{I-1}}{\Delta t} \right) \right\} \frac{1}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t^2} (\Delta \mathbf{d}_{I+1} - 2\Delta \mathbf{d}_I + \Delta \mathbf{d}_{I-1})\end{aligned}\quad (8)$$

また簡単のために、質量は折線ケーブルの節点に集中、質量マトリックスを $\mathbf{M}$ として、第 I ステップにおける運動方程式は(8)式を(1)式に代入し次のようになる。

$$\begin{aligned}& \left(\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t^2} + \mathbf{K}_{I+1} \right) \Delta \mathbf{d}_{I+1} + \mathbf{b}_{I+1} \\ &= \Delta \mathbf{P}_{I+1} + \mathbf{M} (2\Delta \mathbf{d}_I - \Delta \mathbf{d}_{I-1}) / \Delta t^2 \\ &\equiv \Delta \mathbf{f}_{I+1}\end{aligned}\quad (9)$$

(9)式の $\mathbf{K}_{I+1}, \mathbf{b}_{I+1}$ は $I+1$ ステップにおける変位増分 $\Delta \mathbf{d}_{I+1}$ の関数であるので、これを $\Delta \mathbf{d}_{I+1}$ に関してTaylor展開すると、接線剛性マトリックス $\mathbf{K}_T$ を用い、

$$\left(\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t^2} + \mathbf{K}_{T, I+1} \right) \delta \Delta \mathbf{d}_{I+1} = \delta \Delta \mathbf{f}_{I+1}\quad (10)$$

となる。

式(9)を用いて図-1に示す移動節点を持つ6部材ケーブルの慣性力によるケーブルの挙動の解析をおこなっている。断面積 $A = 1.0 \text{ cm}^2$ 、ヤング率 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、荷重としては各部材の体積力として 10 kg を載荷している。7節点が移動節点であり、 x 軸方向に振幅 10 cm 、周期 20 s の正弦曲線で変位を与えている。1ステップごとの時間の刻みは 1 s としている。図-2が解析結果である。実線は慣性力を考慮しない場合の結果、破線は慣性力を考慮した場合の結果である。慣性力によりケーブルの挙動が大きく変化していることがわかる。なお各ステップの最初1サイクルだけ二段階制御法を用い、それ以後は荷重制御法により解析をおこなっている。

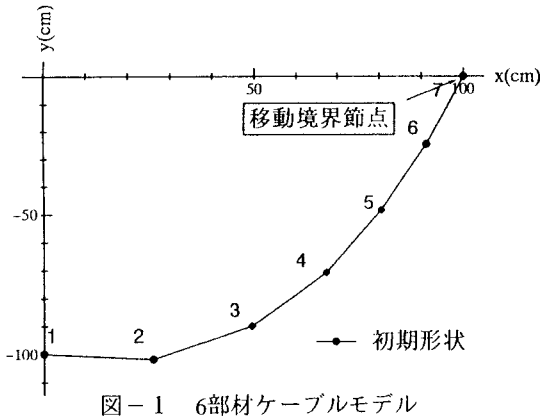


図-1 6部材ケーブルモデル

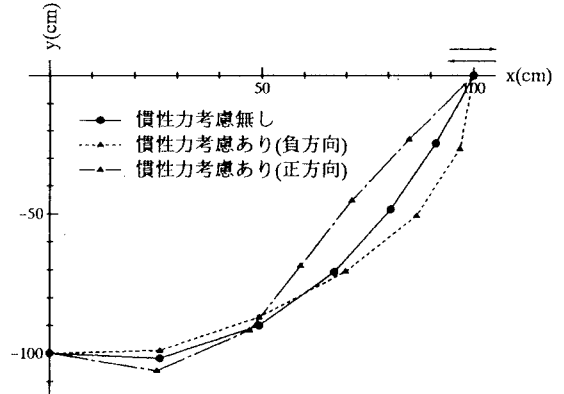


図-2 6部材ケーブルの解析結果

4. まとめ

(1) 静的大変形解析において無応力状態から二段階制御法と応力が導入されてからは荷重制御法による解析をおこない良好な結果を得た。

(2) 大変形構造解析の基礎式に加速度項を導入し定式化をおこない、その式を用いて二段階制御法と荷重制御法の組み合わせによりケーブルの動的解析をおこなった。それによりケーブルの時間による挙動の変化を示した。

今後の課題として、複雑な多部材の折線ケーブルに対する制御変位の与えかたに検討の余地があるように思われる。

5. 参考文献

- 1) 後藤茂夫他、非線形有限変形法によるトラスの大変形解析とその応用プログラム、土木学会論文報告集、194号、1971
- 2) 佐藤啓治他、二段階制御法による折れ線ケーブル構造解析、構造工学における数値解析法シンポジウム、1995