曲線部材をもつ骨組構造の座屈解析

熊本大学　学生員　○橋本　淳也
熊本工業大学　正　員　三池　亮次
熊本大学　正　員　小林　一郎
同　上　学生員　東　高徳

1. はじめに

筆者らは先に、有限変位仮想仕事の定理に従って接続マトリックス $\mathbf{C}$ と平衡マトリックス $\mathbf{H}$ という骨組構造の形状を表すマトリックスを用いた有限変位骨組構造の基礎式を誘導した。

有限変位解析を行う際に、幾何剛性マトリックスは重要な情報を提供する。剛結骨組構造の場合、部材断面力として軸力・せん断力・曲げモーメントが作用するので、部材が初期状態において直線であっても変形の中間状態や変形後状態には曲線になり、直線に近似することができない場合が生じてくる。よって、曲線部材の幾何剛性マトリックスが必要であると考える。

任意の曲線部材で構成される骨組構造の幾何剛性マトリックスを誘導し、それを用いた線形座屈解析を行い、この幾何剛性マトリックスの正当性について検討する。

2. 有限変位部材の平衡マトリックス

図1において、基準座標 (x, y) に対する部材傾斜角を ψ 部材の i 端における傾角を ϕ_i 、i 端における部材要素の回転角を θ_i 、部材回転角を $\Delta\psi$ 、 移動部材座標系 $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ に対する i 端の部材傾斜角を $\tilde{\phi}_i$ とする。添字 $'$ は中間状態における値を示す。

中間状態において、部材始端 i' から部材軸に沿って ξ' の距離の点 b における部材断面力ベクトルを $\mathbf{p}'_{m\xi}$ とすると、$(b'j')$ 部材に関する部材断面力に関するつり合い式は、部材平衡マトリックス $\mathbf{H}'_{\xi j}$ を用い

$$\mathbf{p}'_{m\xi} + \mathbf{H}'_{\xi j}\mathbf{p}'_{mj} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

なお $(b'j')$ 部材の始端の部材断面力は $-\mathbf{p}'_{m\xi}$ である。変形後も同様に

$$\mathbf{p}_{m\xi} + \mathbf{H}_{\xi j}\mathbf{p}_{mj} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

移動座標系である $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ 座標軸方向の成分をもつ部材断面力ベクトル $\mathbf{p}_{\tilde{m}\xi}$ と $\mathbf{p}_{\tilde{m}j}$ の間には、平衡マトリックスは

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\xi j} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\tilde{\eta} & \tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j & -1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

であるから、b および j 端における部材軸とそれに直交する座標軸からなる (ξ, η) 座標系の $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ 座標系に対する座標変換マトリックスを $\tilde{\mathbf{L}}_\xi$、$\tilde{\mathbf{L}}_j$ とすると式(2)における平衡マトリックス $\mathbf{H}_{\xi j}$ は

$$\mathbf{H}_{\xi j} = \tilde{\mathbf{L}}_\xi^T \tilde{\mathbf{H}}_{\xi j} \tilde{\mathbf{L}}_j \qquad (4)$$

と表される。ここに

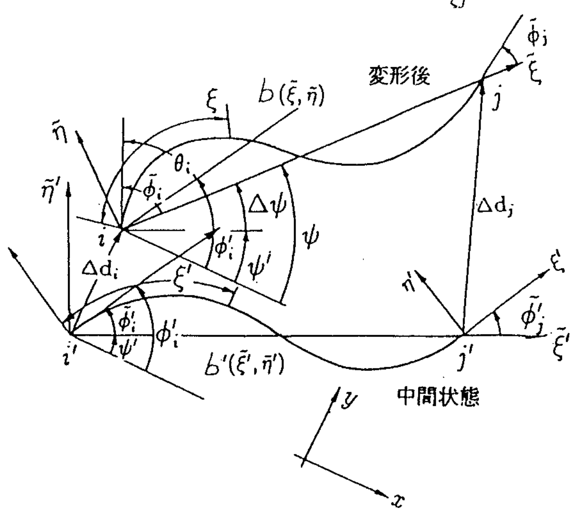

図1　骨組構造の第I曲線部材の変形

$$\tilde{\mathbf{L}}_\xi = \begin{bmatrix} \cos\tilde{\phi} & -\sin\tilde{\phi} & 0 \\ \sin\tilde{\phi} & \cos\tilde{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{\mathbf{L}}_j = \begin{bmatrix} \cos\tilde{\phi}_j & -\sin\tilde{\phi}_j & 0 \\ \sin\tilde{\phi}_j & \cos\tilde{\phi}_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

式(4)に、式(3),(5)を代入すると、変形後の状態における曲線部材を有する骨組構造の平衡マトリックス $\mathbf{H}_{\xi j}$ を式(6)として得る。

$$\mathbf{H}_{\xi j} = \begin{bmatrix} -\cos\tilde{\phi}\cos\tilde{\phi}_j - \sin\tilde{\phi}\sin\tilde{\phi}_j & \sin\tilde{\phi}_j\cos\tilde{\phi} - \cos\tilde{\phi}_j\sin\tilde{\phi} & 0 \\ -\sin\tilde{\phi}_j\cos\tilde{\phi} + \cos\tilde{\phi}_j\sin\tilde{\phi} & -\cos\tilde{\phi}\cos\tilde{\phi}_j - \sin\tilde{\phi}\sin\tilde{\phi}_j & 0 \\ -\tilde{\eta}\cos\tilde{\phi}_j + (\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j)\sin\tilde{\phi}_j & \tilde{\eta}\sin\tilde{\phi}_j + (\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j)\cos\tilde{\phi}_j & -1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

図1の部材端 i から部材軸に沿う距離 ξ における b 点の移動部材座標 $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ と勾配 $\tan\tilde{\phi}$ を

$$\tilde{\xi} = a_1\xi \quad , \quad \tilde{\eta} = b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 \quad , \quad \tan\tilde{\phi} = c_1 + c_2\xi + c_3\xi^2 \qquad (7)$$

と表す。すなわち変形後の部材軸の曲線を三次曲線と仮定する。部材端の座標と勾配の条件から

$$a_1 = \frac{\tilde{\xi}_j}{l} \quad \left.\begin{array}{ll} b_1 = \frac{1}{l}\tilde{\xi}_j \tan\tilde{\phi}_i & c_1 = \tan\tilde{\phi}_i \\ b_2 = -\frac{1}{l^2}\tilde{\xi}_j(2\tan\tilde{\phi}_i + \tan\tilde{\phi}_j) & c_2 = -\frac{2}{l}(2\tan\tilde{\phi}_i + \tan\tilde{\phi}_j) \\ b_3 = \frac{1}{l^3}\tilde{\xi}_j(\tan\tilde{\phi}_i + \tan\tilde{\phi}_j) & c_3 = \frac{3}{l^2}(\tan\tilde{\phi}_i + \tan\tilde{\phi}_j) \end{array}\right\} \tag{8}$$

が得られる。

3. 有限変位解析の基礎式

有限変位仮想仕事の定理に基づいて、変形の中間状態からの剛結骨組構造の有限変位解析の増分形基礎式は、

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{d} + \mathbf{b} \tag{9}$$

のように与えられる。ここに、$\Delta\mathbf{p}$ と $\Delta\mathbf{d}$ は変形の中間状態から荷重と変位の増分で、

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})^T \\ \mathbf{b} &= \Delta\mathbf{C}\mathbf{p}'_m - (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{F}_m\mathbf{p}'_m - (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{e}_\theta \end{aligned} \tag{10}$$

である。$(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})$ は変形後の接続マトリックス、$\mathbf{K}_m = \mathbf{F}_m^{-1}$、$\Delta\mathbf{e}_\theta$ は有限変位に伴うひずみの補正ベクトルである。

$\mathbf{F}_m, \Delta\mathbf{F}_m$は、部材剛性 EA, EI （E は弾性係数、A は部材断面積、I は断面二次モーメント）の逆数を対角要素とする対角マトリックスを $\mathbf{F}_e$ とすると

$$\mathbf{F}_m = \int_L \mathbf{H}_{\xi j}^T\mathbf{F}_e\mathbf{H}_{\xi j}d\xi' \quad , \quad \Delta\mathbf{F}_m = \int_L \mathbf{H}_{\xi j}^T\mathbf{F}_e\left(\mathbf{H}_{\xi j} - \mathbf{H}'_{\xi j}\right)d\xi' \tag{11}$$

である。積分は部材長 L の全体にわたって行われる。

4. 幾何剛性マトリックス

変形の中間状態において、式(9)を変位増分 $\Delta\mathbf{d}$ で微分し、中間状態における条件を与えることによって、中間状態における接線剛性マトリックス $\mathbf{K}'_T$ を求めることができる。すなわち、

$$\delta\Delta\mathbf{p} = (\mathbf{K}'_E + \mathbf{K}'_G)\delta\Delta\mathbf{d} \equiv \mathbf{K}'_T\delta\Delta\mathbf{d} \tag{12}$$

ここに、$\mathbf{K}'_E$ と $\mathbf{K}'_G$ はそれぞれ弾性及び幾何剛性マトリックスで

$$\mathbf{K}'_E = \mathbf{C}'\mathbf{K}_m\mathbf{C}'^T \quad , \quad \mathbf{K}'_G = \left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_0\mathbf{p}'_m - \mathbf{C}'\mathbf{K}_m\left[\frac{\partial\Delta\mathbf{F}_m}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_0\mathbf{p}'_m \tag{13}$$

である。添字 0 は中間状態における値を示す。$\left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right], \left[\frac{\partial\Delta\mathbf{F}_m}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]$ は、立体マトリックスである。

$$\left(\frac{\partial\Delta\mathbf{F}_m}{\partial\Delta d_i}\right)_0 = \left\{\int_\ell \mathbf{H}_{\xi j}^T\mathbf{F}_e\frac{\partial\Delta\mathbf{H}_{\xi j}}{\partial\Delta d_i}d\xi'\right\}_0$$

であるから、剛結骨組構造の幾何剛性マトリックス $\mathbf{K}'_G$ は、接続マトリックス $\mathbf{C}$ と平衡マトリックスの増分 $\Delta\mathbf{H}_{\xi j}(=\mathbf{H}_{\xi j} - \mathbf{H}'_{\xi j})$ の変位による微分から得られる。

$\Delta\mathbf{H}_{\xi j}$ の変位による微分は、式(8)の形状係数の微分に帰着する。その形状係数の微分を表 1 に示す。

曲線部材を有する構造の幾何剛性マトリックスは、これらを式(6)に対して適用することによって得られる。式(6)の成分を

$$\mathbf{H}_{\xi j} = \begin{bmatrix} f_a(\xi) & -f_b(\xi) & 0 \\ f_b(\xi) & f_a(\xi) & 0 \\ f_c(\xi) & f_d(\xi) & -1 \end{bmatrix}$$

とすると

$$\frac{\partial\Delta\mathbf{H}_{\xi j}}{\partial\Delta d_i} = \begin{bmatrix} f_a^\bullet(\xi) & -f_b^\bullet(\xi) & 0 \\ f_b^\bullet(\xi) & f_a^\bullet(\xi) & 0 \\ f_c^\bullet(\xi) & f_d^\bullet(\xi) & 0 \end{bmatrix}$$

となる。添字 $\bullet$ は変位による微分を示す。

表 1　形状係数の微分
(u, v, θは水平、鉛直、回転方向の変位)

	u_i	v_i	θ_i	θ_j
$\tan\tilde{\phi}_i$	$-\frac{\sin\psi}{\tilde{\xi}_j\cos^2\tilde{\phi}_j}$	$\frac{\cos\psi}{\tilde{\xi}_j\cos^2\tilde{\phi}_j}$	$\frac{1}{\cos^2\tilde{\phi}_i}$	0
$\tan\tilde{\phi}_j$	$-\frac{\sin\psi}{\tilde{\xi}_j\cos^2\tilde{\phi}_j}$	$\frac{\cos\psi}{\tilde{\xi}_j\cos^2\tilde{\phi}_j}$	0	$\frac{1}{\cos^2\tilde{\phi}_j}$
$\tilde{\xi}_j$	$-\cos\psi$	$-\sin\psi$	0	0

$$\frac{\delta}{\delta u_j} = -\frac{\delta}{\delta u_i} \quad , \quad \frac{\delta}{\delta v_j} = -\frac{\delta}{\delta v_i}$$

その幾何剛性マトリックスを用いて曲線部材を含む剛結骨組構造のいくつかの解析を試みる。解析結果については研究発表会にて報告する。

参考文献

1) Miike,R.,Kobayashi,I.,Yamada,Z.:"Virtual Large Displacement Theorem for Frame Structures"ASCE, 1990
2) 三樹祐太、三池亮次、小林一郎、橋本淳也: "形状マトリックスを用いた曲線部材骨組の幾何剛性マトリックス" 土木学会西部支部講演概要集,1996