

接続マトリックスを用いた 中間荷重作用の骨組構造解析

熊本工業大学 正員 三池 亮次
 熊本大学 学生員 橋本 淳也
 熊本工業大学 宮元 謙次
 熊本大学 正員 小林 一郎

1 はじめに

骨組構造の節点荷重 $\mathbf{p}$ と部材断面力 $\mathbf{p}_m$ の関係を規定するマトリックスである接続マトリックス $\mathbf{C}$ と、部材両端断面力の関係を定める平衡マトリックス $\mathbf{H}$ を用い、Livesley は構造解析を試みている。荷重としては、節点荷重のみを対象としているが、ここでは、節点荷重以外に部材間に作用する分布荷重（以下 中間荷重という）が作用する場合の接続マトリックスを用いた構造解析の基礎式を組み立てる。

接続マトリックスを用いた解法は、荷重と変位の関係の定式化が直接的であるのでコンピュータープログラムにより大きい容量を必要とするが、座屈解析や最適設計等の、荷重の変位による微分などのアルゴリズムが単純で演算が容易になる。

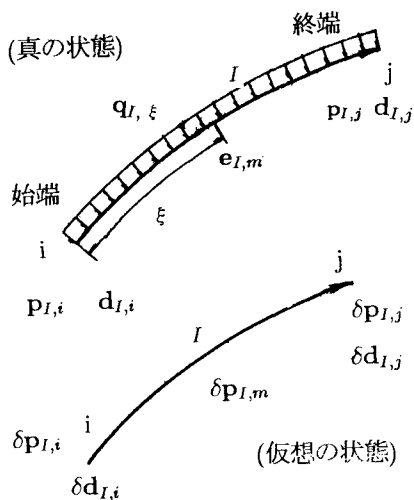


図1 第I部材に作用する力

2 接続マトリックスを用いた骨組構造解析

(1) 両端固定荷重定数

骨組構造の長さ ℓ の第I部材の始端 i と終端 j に作用する部材端力と変位を $(\mathbf{p}_{I,i}, \mathbf{d}_{I,i})$ 、 $(\mathbf{p}_{I,j}, \mathbf{d}_{I,j})$ 、部材に作用する中間荷重の始端からの距離 ξ における荷重強度を $q_{I,\xi}$ とする。

部材応力は、部材終端の断面力で代表させるものとしこれを $\mathbf{p}_{mI}$ と表す。この $\mathbf{p}_{mI}$ と $\mathbf{p}_{mI}$ に対応するひずみベクトル $\mathbf{e}_{mI}$ （始端を固定したときの終端の変位 $\mathbf{d}_{I,j}$ ）の間に

$$\mathbf{p}_{mI} = \mathbf{K}_{mI} \mathbf{e}_{mI} + \mathbf{c}_{mI} \quad (1)$$

の関係がある。ここに $\mathbf{K}_{mI}$ は、部材剛性マトリックス $\mathbf{c}_{mI}$ は式(1)より両端が固定され $\mathbf{c}_{mI} = \mathbf{0}$ の時の終端断面力 $\mathbf{p}_{mI}$ のことであることがわかる。 $\mathbf{c}_{mI}$ を終端固定荷重定数ということにする。式(1)を全部材につい

て集め

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{K}_m \mathbf{e}_m + \mathbf{c}_m \quad (2)$$

を得る。ここに、

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{m1} & & & \\ & \mathbf{K}_{m2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \mathbf{K}_{mI} \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{m1} \\ \mathbf{c}_{m2} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{mI} \\ \vdots \end{bmatrix}, \mathbf{p}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{m1} \\ \mathbf{p}_{m2} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{mI} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3)$$

上式で $\mathbf{K}_m$ がブロック対角マトリックスとなることがコンピュータープログラムで大容量を必要とする理由である。

(2) 一端固定荷重定数

中間荷重が作用するときの部材断面力 p_m と、節点外力 p の間には、接続マトリックス C を用い、

$$p = Cp_m + c_L \quad (4)$$

のように表すことができる。ここに c_L は、中間荷重作用による荷重項で各節点におけるつり合いより求めることができる。第 I 部材の始端 i と終端 j における断面力 $p_{I,i}$, $p_{I,j}$ の間には、中間荷重が作用する場合には、平衡マトリックスを用い

$$p_{I,i} = -H_{ij}p_{I,j} - q_{LI,i} \quad (5)$$

の関係がある。 $q_{LI,i}$ は、始端固定で、終端が自由で $p_{I,j} = 0$ のときの中間荷重に基づく始端における断面力とは反対方向の力で、いわば、始端固定荷重項である。上式の断面力は、部材軸方向を x 軸とする部材座標形で与えられ軸方向力が N 、せん断力 Q 、曲げモーメント M を成分とするので、これに座標変換マトリックス $L_{I,i}$ を乗じて基準座標形に変換し節点における釣合式を立てる。I 部材の節点は始端であるので $q_{LI,j}$ を考慮する必要があるが、 i 節点を共有する J 部材の i 端は終端のとき、部材応力は終端の断面力で表すので、始端固定荷重項は、考慮する必要がない。以上の考察から式 (4) は以下のようにして組み立てられる。

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_j \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & -L_{I,i}H_{ij} & \cdots & L_{I,i} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & L_{I,j} & \cdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ p_{mI} \\ \vdots \\ p_{mJ} \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ -\sum_I L_{I,i}q_{LI,i} \\ \vdots \\ 0 + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6)$$

(3) 基礎式の誘導 中間荷重の作用する真の状態と仮想力の間に補仮想仕事の原理を適用する。仮想力としては中間荷重は作用しないものとし、外力を δp , 部材断面力 (部材終端における) を δp_m とする。補仮想仕事の原理は

$$\delta p^T d = \delta p_m^T e_m \quad (7)$$

である。ここに、 d は、外力 p にともなう変位である。仮想力の間の次式

$$\delta p = C\delta p_m \quad (8)$$

を式 (7) に代入、これを式 (2) に用い

$$p_m = K_m C^T d + c_m \quad (9)$$

を得る。さらに、これを式 (4) に用い、基礎式を得る。すなわち

$$p = Kd + c \quad (10)$$

ここに、

$$K = CK_m C^T, c = Cc_m + c_L \quad (11)$$

式 (10) における荷重項 C は、全節点を固定し、 $d = 0$ としたときの、中間荷重と等価の節点荷重といえる。

3 適用例

骨組形状が 1 辺 500 cm の正方形のラーメンが支点において剛結させる場合、ピン結合される場合何れに対しても水平部材に等分布荷重 $q=10\text{kgf/cm}$ と自由 2 節点に集中荷重 5000 kgf が作用するとき、上記の式に基づいてコンピューターによる反力及び応力を求め、これをたわみ角の結果と比較しほぼ一致する解を得ている。

本研究を行うにあたり、熊本工業大学土木工学科学生 戸部 日登志、矢立 仁志、今井 慎一郎、高田 成治、早川 英孝君の御協力を得た。記して謝意を表す。

参考文献 1) Miike, R., Kobayashi, I. and Yamada, Y. Virtual Large Displacement Theorem for Framed Structures, J. Engrg. Mech. ASCE, pp411-428, 1990.
2) Livesley, R. K., Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press Ltd., England, 1964.