有限要素法による測量計算

福岡大学工学部　正　員　黒木健実

1　はじめに

距離と角度に関する要素を導入することで測量網の座標計算が有限要素法の立場から行えることを示す。本論では要素の観測方程式から最小２乗法により正規方程式が誘導される過程を述べる。プログラムの作成には既存の有限要素法プログラムが利用できる。

2　要素の種類

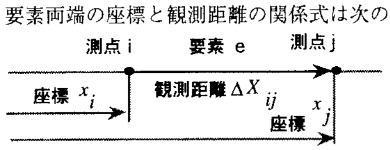
点要素、距離要素および角要素の３種類を考える。距離要素と角要素は線形と非線形の要素に分類される。

点要素

測量における観測網は測点とこれらの測点を結ぶ測線から構成されている。測点の座標が直接観測されるときはその測点に関して観測方程式が立てられる。このとき測点を点要素とみなす。

距離要素

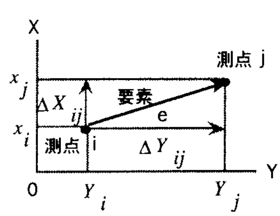
図１に示すようにすべての測点がひとつの直線上に並ぶ場合、１本の測線を１次元距離要素とみなす。この場合、要素両端の座標と観測距離の関係式は次のように表わされる。ただし v_e は残差である。



$$v_e = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} - \Delta X_{ij} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

図１　１次元線要素

測点が平面上に配置され（図２）、測線の距離と方向角から測線の成分（緯距と経距）が与えられるトラバース測量では測線を２次元距離要素とみなす。測線の成分と座標との関係は式（２）のように書ける。



$$\begin{bmatrix} v_{ex} \\ v_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X_{ij} \\ \Delta Y_{ij} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

図２　２次元距離要素

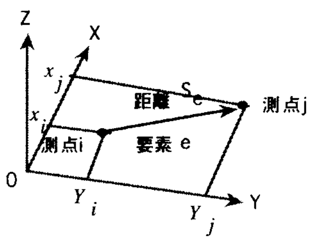
GPS測量では測線は３つの成分を持つので、３次元距離要素が必要となる。
水準測量ではひとつの観測区間を要素とみなす。測点の高さと測点間の高低差の関係は次のように表される。

$$v_e = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_i \\ Z_j \end{bmatrix} - \Delta Z_{ij} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

これも１次元要素であるが１次元距離要素と区別するためにこれを水準要素と呼ぶ。
測線の距離が観測される場合（図３）は測点の座標は陽な形式では表わせないので数値計算を行うには

座標＝近似座標＋補正量

とおいて補正量を未知数とする線形化が必要となる。これについては測量学の成書に詳しいが、本論ではこれを非線形距離要素と呼ぶ。次の式は線形化された観測方程式である。未知数は座標の補正量であり、係数a,bは近似座標の関数となる。この要素は三角測量や三辺測量などにおける座標計算に利用される。



$$v_{se} = \begin{bmatrix} -b_{ij} & -a_{ij} & b_{ij} & a_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{bmatrix} + l_{se} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

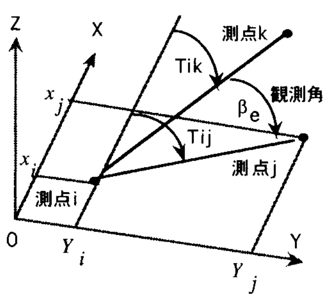
図3　２次元非線形距離要素

角要素

平面上の一つの点のまわりの角観測において回転中心を共有する２本の線分の基準軸からの傾斜角とこの２本の線分が挟む観測角との間には次の観測方程式が成り立つ。要素の分類からいえば線形要素であり、１次元距離要素の観測方程式と同じ式形となる。

$$v_e = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} - \Delta\theta_{ij} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

三角測量における座標計算には上の非線形距離要素の他に観測角に対応する２種類の非線形角要素が考えられる。ひとつは２つの測線間の角度を観測値として測点の座標値を未知数とするものである（図４）。



$$v_{\beta e} = \begin{bmatrix} b_{ij} - b_{ik} & -a_{ij} + a_{ik} & -b_{ij} & a_{ij} & b_{ik} & -a_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \\ \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{bmatrix} + l_{\beta e} \quad (6)$$

図４　第１種の非線形角要素

このほかに１つの測線の方向角が観測される場合の要素（第２種の非線形角要素）を用意しなければならない。

3　有限要素法の定式化

以上に示した要素の観測方程式は$\mathbf{v}_e = \mathbf{A}_e\,\mathbf{x}_e - \mathbf{b}_e$という式形にまとめられる。これと要素の重み行列$\mathbf{W}_e$　を考慮して 残差に関する最小２乗条件を求めると

$$\sum_{e=1}^{n} \delta \mathbf{x}_e^T \left\{ \mathbf{K}_e\,\mathbf{x}_e - \mathbf{f}_e \right\} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

ただし

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{A}_e^T \mathbf{W}_e \mathbf{A}_e、\ \mathbf{f}_e = \mathbf{A}_e^T \mathbf{W}_e \mathbf{b}_e$$

はそれぞれ骨組構造要素の剛性マトリックスと荷重ベクトルに相当するものである。式（７）は

$$\delta \mathbf{x}^T \left(\mathbf{K}\ \ \mathbf{x}\ - \mathbf{f}\ \right) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

と書き換えられる。次に既知の測点座標を考慮すると測点の座標に関する正規方程式

$$\mathbf{K}\ \ \mathbf{x}\ = \mathbf{f} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

が完成する。非線形要素では$\mathbf{x}$は座標の補正量であるから十分な精度が得られるまで繰り返し計算が必要となる。