

k-ε型乱流モデルによる密度連行現象の数値解析

九州大・総理工 学生員○中平 伸治 正 員 杉原 裕司
正 員 松永 信博

1.はじめに

成層乱流場の密度連行現象を数理的視点から検討することは、現象の理解と予測の精度向上において重要である。本研究では工学的に最も応用が進んでいるk-εモデルを安定成層場へ拡張し、成層振動格子乱流場の密度連行特性について解析したので報告する。

2.成層振動格子乱流k-εモデルの定式化

(1) 乱流浮力フラックスの導出

鉛直流速の変動成分 w' を対流成分 w_i と浮力変動成分に分離し、変動密度 ρ を乗じてアンサンブル平均を取れば以下のような乱流浮力フラックスが得られる。

$$\overline{w'\rho'} = \overline{w_i'\rho'} - C_\rho \tau_t \frac{\rho'^2}{\rho_0} g \quad (1)$$

ここで、 τ_t は乱れのタイムスケール、 g は重力加速度、 ρ_0 は基準密度、 C_ρ は定数である。式(1)の右辺第1項は対流成分による浮力フラックスであるので勾配拡散の形で記述できるとし、第2項は密度変動のエネルギー方程式において生成と散逸がバランスするものと仮定すれば以下の式が得られる。

$$\overline{w_i'\rho'} = -\alpha_t \frac{\partial \rho}{\partial z}, \quad -\overline{w'\rho'} \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\rho'^2}{\beta \tau_t} \quad (2)$$

ここで、 z は鉛直座標、 α_t は渦動拡散係数、 β は定数である。従って式(1)、(2)より乱れの非等方性を考慮した乱流浮力フラックスは以下になる。

$$\overline{w'\rho'} = -D_t \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (3)$$

$$D_t = \alpha_t \left(1 - \sigma \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} l_t^2 / k \right)$$

ただし、 $\tau_t = l_t / k^{1/2}$ 、 $\sigma = C_\rho \beta$ を用いており、 l_t は乱れの代表長さスケール、 k は乱れエネルギー、 σ はモデル定数である。

(2) 乱流モデル方程式および境界条件

振動格子乱流は近似的に平均流がなく、水平面内において一様で鉛直方向にのみ変化する場とみなすことができる。浮力フラックス式(3)を組み込んだk-ε方程式を振動格子乱流場の特性に基づいて単純化すれば成層振動格子乱流場に関する次の方程式系が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right\} + \frac{g}{\rho_0} D_t \frac{\partial \rho}{\partial z} - \epsilon \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right\} - C_2 \frac{\epsilon^2}{k} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (D + D_t) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\} \\ D_t &= \alpha_t \left(1 - \sigma \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{k^2}{\epsilon^2} \right) \\ v_t &= C_\mu k^2 / \epsilon, \quad \alpha_t = v_t / \sigma_t \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 ϵ はエネルギー散逸率、 D は分子拡散係数であり、 z は格子振動中心より鉛直上向きに取られている。 σ_k 、 σ_ϵ 、 C_μ 、 C_2 はk-ε定数の標準値を用いることとし、それぞれ1.0、1.3、0.09、1.92である。また α_t は1.0とした。 σ は本モデルに含まれる唯一の未知パラメータである。今鉛直境界からは浮力の供給はないものとし、成層振動格子乱流場の境界条件を次式のように仮定する。

$$\begin{aligned} k &= k_0, \quad \epsilon = \epsilon_0, \quad \partial \rho / \partial z = 0, \quad \text{at } z = 0 \\ k &\rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \partial \rho / \partial z = 0, \quad \text{as } z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5)$$

境界値 k_0 、 ϵ_0 、および基準密度 ρ_0 を用いて式(4)、(5)を規格化すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{k}}{\partial \hat{t}} &= \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left\{ \frac{\hat{v}_t}{F_r} \frac{\partial \hat{k}}{\partial \hat{z}} \right\} + \frac{1}{F_r^2} D_t \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{z}} - \hat{\epsilon} \\ \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial \hat{t}} &= \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left\{ \frac{\hat{v}_t}{P_e} \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial \hat{z}} \right\} - C_2 \frac{\hat{\epsilon}^2}{\hat{k}} \\ \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} &= \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left\{ \left(\frac{1}{P_e} + D_t \right) \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{z}} \right\} \\ D_t &= \hat{\alpha}_t \left(1 - \sigma \frac{1}{F_r^2} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{z}} \frac{\hat{k}^2}{\hat{\epsilon}^2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \hat{v}_t &= C_\mu \hat{k}^2 / \hat{\epsilon}, \quad \hat{\alpha}_t = \hat{v}_t / \hat{\sigma}_t \\ \hat{k} &= 1.0, \quad \hat{\epsilon} = 1.0, \quad \partial \hat{\rho} / \partial \hat{z} = 0, \quad \text{at } \hat{z} = 0 \\ \hat{k} &\rightarrow 0, \quad \hat{\epsilon} \rightarrow 0, \quad \partial \hat{\rho} / \partial \hat{z} = 0, \quad \text{as } \hat{z} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 λ は無次元量を示す。式中の Fr 、 Pe はそれぞれ $Fr = \sqrt{\epsilon_0 / g k_0^{1/2}}$ 、 $Pe = k_0^2 \epsilon_0^{-1} / D$ で定義された格子フルード数、格子ペクレ数である。

Fr 、 Pe 等のパラメータの設定に必要な境界値 k_0 、 ϵ_0 は振動格子乱流の場合、 $Re (= f S^2 / \nu) \geq 6000$ において次式の普遍式で評価できる¹⁾。

$$k_0 = 0.60 f^2 S^2 (S/M)^{1/4}, \quad \epsilon_0 = 0.45 f^3 S^2 (S/M) \quad (8)$$

ただし、 f は格子振動数、 S は振幅、 M は格子のメッシュ間隔であり、 ν は動粘性係数である。なお本解析ではE & Hopfinger²⁾によって行われた初期密度が線形分布である場合の塩分連行実験のシミュレートを試みた。実験装置の模式図と解析座標を図-1に示す。彼らの装置では乱れの生成が従来のものより大きいことが指摘されており、そのことを考慮して式(8)の補正係数として $\gamma_k = 1.8$ 、 $\gamma_\epsilon = 2.0$ をそれぞれに乘じた。本解析の計算条件を表-1に示す。

3.数値解析結果および考察

モデル定数 σ に関しては、Hopfinger & Linden³⁾の二成層乱流場における密度界面厚さの実験値によく適合する値を採用することとした。図-2に σ を変化させた場合の数値解と実験値の適合性を示す。図中の Pet は、

乱れのrmsと積分長さスケールを用いて定義された局所ペクレ数である。解析における Pet はほぼ400である。この比較より σ の値として0.15を採用した。

図-3は、鉛直密度分布の経時変化についての解析結果の一例を示す。時間の経過とともに混合層が発達し、下層の乱流域では密度が十分に一樣化するという連行の特徴を本モデルはよくとらえている。

図-4は、密度界面上端位置 $\hat{D}^*$ の経時変化に関する数値解とE & Hopfingerの実験値を比較したものである。両者は極めてよく一致しており、時間が十分経過した後は $\hat{D}^*$ は $\hat{t}$ の1/8乗に比例して増加する。

図-5は、連行係数 E と局所リチャードソン数 Ri の関係における数値解と実験値の適合性を示したものである。 E と Ri は、Hopfinger & Toly³⁾の乱れのrmsと積

分長さスケールの経験式に基づいて定義されている。これらの定義の詳細については講演時に示す。従来、高 Pe 数条件においては E が Ri の-3/2乗に比例する密度連行則が提案されている。乱流モデル解析でも同様の傾向がシミュレートできており、数値解と実験値はよく一致している。

以上のように線形成層場の密度連行特性に関する解析結果と実験データの比較において、本モデルの妥当性がほぼ確認されたものと考える。今後は、本モデルの数理的特性について詳細に検討する予定である。

- [1] 松永他, ながれ, 第11巻, 第4号, 1992.
- [2] E & Hopfinger, *J. Fluid Mech.*, Vol.166, 1986.
- [3] Hopfinger & Linden, *J. Fluid Mech.*, Vol.114, 1982.
- [4] Hopfinger & Toly, *J. Fluid Mech.*, Vol.78, 1976.

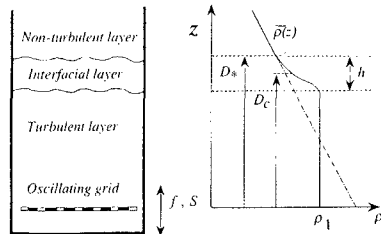


図-1 振動格子連行実験装置と解析座標

表-1 計算条件

	RUN1	RUN2
f (Hz)	2.0	3.0
S (cm)	8.5	8.5
M (cm)	10.0	10.0
N (s ⁻¹)	1.227	1.196
Re	1.45×10^2	2.17×10^2
$\gamma_k k_0$	3.00×10^2	6.74×10^2
$\gamma_c E_0$	4.37×10^2	1.48×10^3
Fr	1.60×10^{-1}	2.41×10^{-1}
Pe	1.42×10^2	2.12×10^2

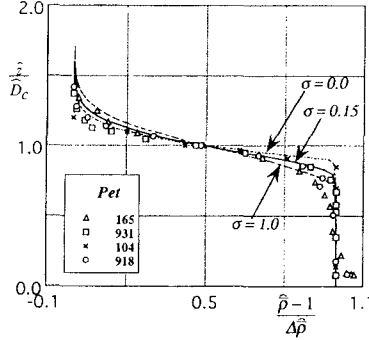


図-2 密度界面厚さと σ の関係

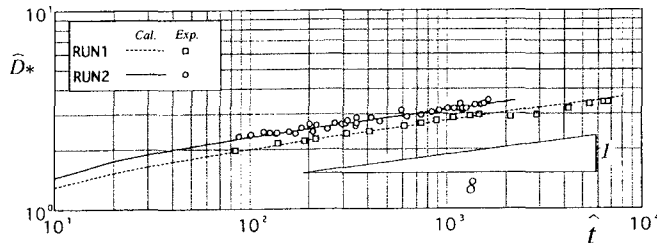


図-4 密度界面位置の経時変化

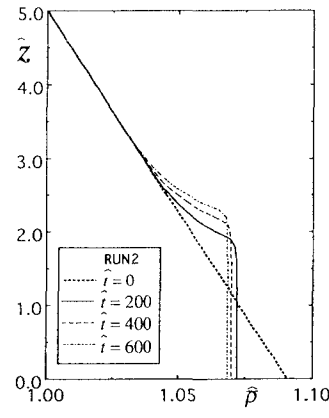


図-3 鉛直密度分布の経時変化

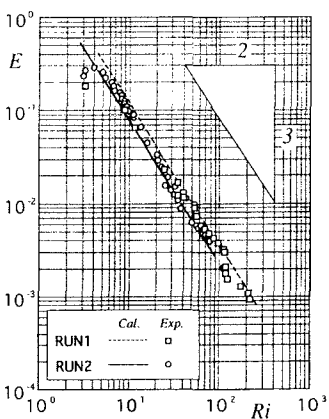


図-5 連行係数 E と局所リチャードソン数 Ri の関係