降雨時系列におけるカオス性について

九州大学　学生員　○中川賢治　　九州大学工学部　正　員　森山　聡之
九州大学工学部　正　員　平野　宗夫

1.はじめに

1976年にアメリカの生物学者Mayがディジタルコンピュータシュミレーションによって、1自由度の単純な非線形差分方程式（ロジスティック差分方程式）がカオス的挙動を生じ得ることを発見[1]して以来、決定論的カオス（determistic chaos）に関する数多くの研究がなされ、様々な少数自由度の非線形力学系が複雑な振る舞いを示すことが明らかにされている。[2]このことは、一見複雑で不規則に見える現象の中に、実はストレンジアトラクタが現れるような構造が内在しており、その構造を単純なモデルで表しえることを示している。

ある現象が決定論的カオスであるかどうかを判断するもっとも確実な方法は、系のパラメータを変化させることによる分岐現象の観測と、カオスへのルートの存在を確認することである。

しかし、降雨現象を始め、世のなかに存在する数多くのシステムはパラメータを変化させることや再実験を行うことが不可能である場合が多い。さらには我々が測定できるデータは、有限長・有限精度であり、観測誤差を含んでいる。

即ち我々が行い得る時系列解析は不良設定問題であり、限られた範囲でしか答えを出すことができない。しかしこのような場合でも、観測された時系列信号だけから対象となる現象に対して、一体それが何であったのか、何がいえるのかということを考えることがしばしば要求される。

このような要求に応えるためにカオス時系列解析の必然性がでてくるのである。

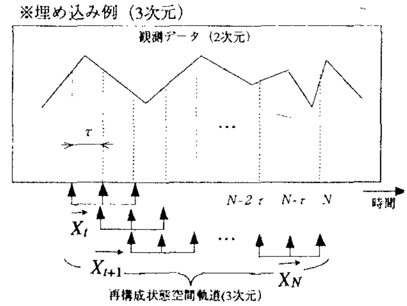
本研究は降雨時系列をカオスの解析手法である時間遅れ、ならびに相関積分の手法を用いて、降雨時系列のカオス性を検討するものである。

2.解析手法とデータ

1）解析手法　まずTakensの埋め込み定理[3]を応用した時間遅れの方法を用いて、観測された1変数の時系列データからn次元相空間上の軌道を再構成する。（τ：遅れ時間）

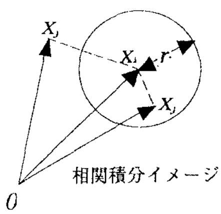
$$\vec{X_t}=(X(t),X(t-\tau),X(t-2\tau),\cdots,X(t-(n-1)\tau))$$
$$\vec{X_{t+1}}=(X(t+1),X((t+1)-\tau),X((t+1)-2\tau),\cdots,X((t+1)-(n-1)\tau))$$
$$\vdots$$
$$\vec{X_N}=(X(N),X(N-\tau),X(N-2\tau),\cdots,X(N-(n-1)\tau))$$

※埋め込み例（3次元）



そこで次式で定義される相関積分C(r)を用いて各相空間上のアトラクタのフラクタル次元の一つである相関次元[4]を求める。

$$C(r)=\lim\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{J=1}^{N}H(r-|\vec{X_i}-\vec{X_J}|)$$



相関積分イメージ

ただしH(t)はヘビサイト関数で

$$H(x)=\begin{cases}1(x\geq 0)\\0(x<0)\end{cases}$$

である。

この相関関数$C(r)$と空間の測度rとを両対数上でプロットをとったグラフにおける適当なrの範囲内での直線部分の傾きを求める。これがその相空間次元における相関指数となる。

相関指数はアトラクタがフラクタル構造を持てば、相空間次元にかかわらず一定値に収束し、ホワイトノイズであれば収束しない。この収束する値がそのアトラクタの相関次元である。

こうして降雨時系列データに対してアトラクタを再構成し、その相関次元を求めることによりカオス性を示す1つの指標である自己相似性を判断することができる。ここで実データを解析対象としたとき時間遅れτの決定は重要である。τが小さすぎると再構成状態空間内のデータは極端に相関が大きくなる。（例えば、2次元再構成状態空間へ埋め込んだ場合、再構成されたアトラクタは傾きが45度の直線近傍上に分布することになる。）このτの最適な決定法についての答えは未だ得られていないため、今回の解析ではもっとも一般的に用いられる元データの自

己相関係数が最初に0となる時刻をτとした。

3）解析に用いたデータ　雲仙岳測候所において1993年に観測された時間刻み10分の降雨データを用いた。連続降雨データの決定に際しては、0が12個並んだ時点で降雨イベントは終わったものと考え、それ以前の降雨データを1つの降雨イベントとして取り扱った。また、模擬データとしてホワイトノイズ、非整数ブラウン運動（フラクタル次元2.0）、ロジスティック写像（a=3.8, Xの初期値0.5）（それぞれデータ数120）を用意した。

3.解析結果

図１に相関積分の例として5/2のデータの解析を、各データに対する相関指数の収束状況を図２、図３に示す。

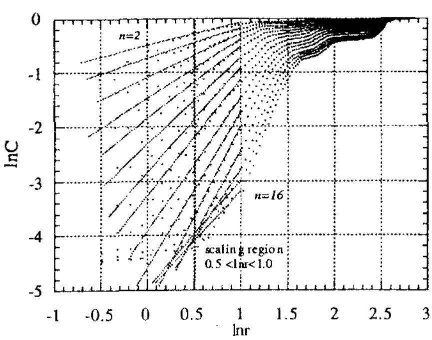


図１　相関積分例（5/2、遅れ時間40分）

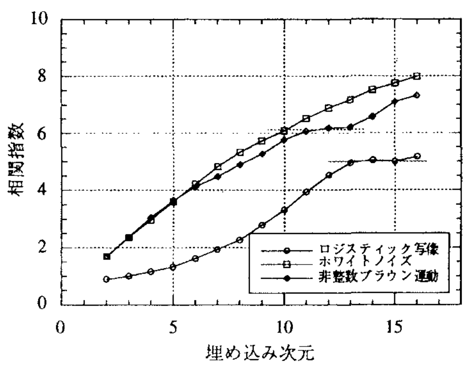


図３　相関指数収束状況（模擬データ）

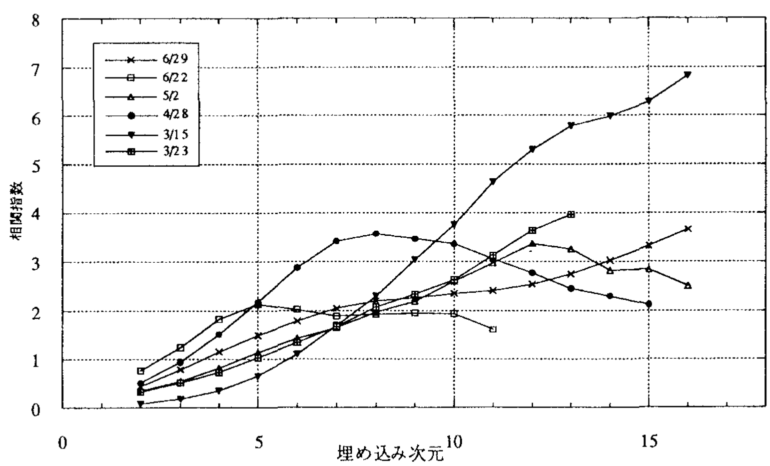


図２　相関指数収束状況（10分間降雨）

4.結論並びに今後の課題

今回の解析に用いた6つのデータの相関指数のうち、４つに収束らしき挙動がみられた。しかしその原因が埋め込み次元の増加によるデータ数の減少である可能性は否定できず、よってこれらの降雨時系列がカオス性を持ち得ると断定はできない。興味を引かれるのは、観測時刻が比較的近い降雨データ（3/15と3/23、4/28と5/2、6/22と6/29）の相関指数がよく似た挙動を示したことである。今後の課題としては、相関次元がデータ数N無限大で定義してあることよりもわかるようにさらに細かい時間ステップのデータを用いてデータ数が増加させ、解析の信頼性の向上をはかりたい。加えて、相関次元解析に必要な総データ数やスケーリング領域、時間遅れτの決定の問題など、まだはっきりしない部分を明確にするとともに、スペクトル解析やリアプノフ指数の導入などを行って降雨時系列の性質を解明していきたい。

参考文献

1)May,R.M,Bifurcations and dynamic complexity in ecological systems,1976

2)ex.)May,R.M,Simple Mathmatical models witth very complicated dynamics,1976

3)Takens,F,In Dynamical Systems and Turbukence,1981

4)Grassberger,et al,Physica 9D,189,1983