

非線形移流方程式の数値解法

九州大学 工学部 正会員 ○朝位孝二

九州大学 工学部 正会員 小松利光

1. まえがき

高精度移流項計算スキームの一つである6-pointスキーム¹⁾は特性曲線法に基づく解法であり、線形の移流問題に対しては有力な計算手法となっている。また大串らは6-pointスキームを非線形移流問題に応用し、衝撃波や段波のシミュレーションを行っている²⁾。しかしながら、大串らの方法には任意パラメータが含まれており、このパラメータの最適値が普遍値でないことに改善の余地が残されている。本研究は、6-pointスキームが計算格子間の高精度補間多項式であることに着目し、有限体積法におけるコントロールボリュームの界面フラックスの評価に6-pointスキームを用いて、線形及び非線形移流問題を高精度かつ高解像度で解くことのできるスキームの開発を試みたものである。

2. 基礎方程式の離散化

ここでは簡単のため次式で表される保存形式の1次元移流方程式について検討する。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial u\Phi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

(1) 式を $x_{i-1/2} \sim x_{i+1/2}$ の領域で空間に関して積分し、時間積分には2次精度Adams-Bashforth法を用いれば次式のような離散化式を得る。

$$\Phi_i^{n+1} = \Phi_i^n + \frac{3}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [u_L^n \Phi_L^n - u_R^n \Phi_R^n] - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [u_L^{n-1} \Phi_L^{n-1} - u_R^{n-1} \Phi_R^{n-1}] \quad (2)$$

ここで、 Φ は熱、質量、流速等の保存量、 u は流速、 Δx 、 Δt はそれぞれ空間、時間に関する格子間隔、添字L及びRはそれぞれコントロールボリュームの左側界面、右側界面の位置を表す(図-1参照)。

有限体積法における代表的な Φ_L 、 Φ_R の評価式を以下に示す。

$$1\text{次精度風上差分: } \Phi_L = \Phi_{i-1} \quad (3) \quad \Phi_R = \Phi_i \quad (4)$$

$$\text{QUICK法: } \Phi_L = \frac{\Phi_i + \Phi_{i-1}}{2} - \frac{\Phi_i - 2\Phi_{i-1} + \Phi_{i-2}}{8} \quad (5)$$

$$\Phi_R = \frac{\Phi_{i+1} + \Phi_i}{2} - \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{8} \quad (6)$$

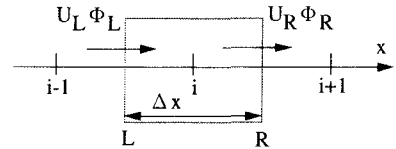


図-1 コントロールボリューム

次に6-pointスキームを有限体積法に応用することを考える。6-pointスキームは次式で表される。

$$\Phi_\xi = P_1 \Phi_{i-3}^n + P_2 \Phi_{i-2}^n + P_3 \Phi_{i-1}^n + P_4 \Phi_i^n + P_5 \Phi_{i+1}^n + P_6 \Phi_{i+2}^n \quad (7)$$

ここで、

$$P_1 = -\frac{13}{720}\alpha^3 - \frac{3877}{101280}\alpha^2 + \frac{17117}{303840}\alpha \quad P_2 = \frac{37}{144}\alpha^3 + \frac{1069}{20256}\alpha^2 - \frac{18821}{60768}\alpha \quad P_3 = -\frac{49}{72}\alpha^3 + \frac{6563}{10128}\alpha^2 + \frac{31373}{30384}\alpha$$

$$P_4 = \frac{49}{72}\alpha^3 - \frac{4705}{3376}\alpha^2 - \frac{8717}{30384}\alpha + 1 \quad P_5 = -\frac{37}{144}\alpha^3 + \frac{5561}{6752}\alpha^2 - \frac{34435}{60768}\alpha \quad P_6 = \frac{13}{720}\alpha^3 - \frac{3121}{33760}\alpha^2 + \frac{22603}{303840}\alpha$$

図-2に示すように特性曲線法による移流方程式の解法は、格子間上の ξ 点の値を内挿によって求めることに帰着する。6-pointスキームは ξ 点近傍の6点の値を用いたクーラン数 α に関する3次補間多項式に他ならない。クーラン数 $\alpha=0.5$ を(7)式に代入すれば、界面L及びRの位置の Φ の値が評価でき、以下のように表される。

$$\Phi_L = \frac{331}{20256} \Phi_{i-3} - \frac{2219}{20256} \Phi_{i-2} + \frac{751}{1266} \Phi_{i-1} + \frac{751}{1266} \Phi_i - \frac{2219}{20256} \Phi_{i+1} + \frac{331}{20256} \Phi_{i+2} \quad (8)$$

$$\Phi_R = \frac{331}{20256} \Phi_{i-2} - \frac{2219}{20256} \Phi_{i-1} + \frac{751}{1266} \Phi_i + \frac{751}{1266} \Phi_{i+1} - \frac{2219}{20256} \Phi_{i+2} + \frac{331}{20256} \Phi_{i+3} \quad (9)$$

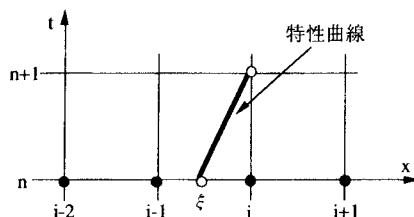


図-2 計算格子と特性曲線

3. モデル計算

3.1 線形移流問題 (8)、(9)式を用いた(2)式の計算精度を調べるためのモデル計算を行った。初期条件としてピーク値10、ピーク位置1400m、標準偏差264mのガウス分布とピーク値6.5、ピーク位置2400m、標準偏差264mのガウス分布の重ね合わせを与え、その分布が拡散を受けずに一定流速0.5m/secで下流方向に9600sec間輸送する問題を考える。計算格子間隔は $\Delta x = 200\text{m}$ 、 $\Delta t = 100\text{sec}$ である。

計算結果を図-3に示す。比較のためQUICKによる結果も示している。6-pointスキームによる解は上流側に振動が現れ、全体的に位相の遅れが見られるが厳密解の二つの極値を良く再現している。一方、QUICKによる解は初期分布の形状を留めないほど数値誤差を受けている。

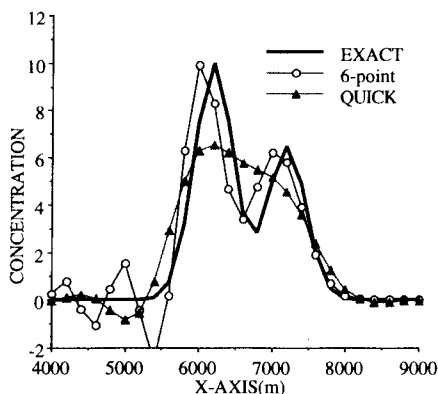


図-3 計算結果(線形移流問題)

3.2 非線形移流問題 次に衝撃波のモデル計算を行う。基礎式は(10)式で表される拡散のない1次元Burger's方程式である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0 \quad (10)$$

初期条件は以下の通りである。

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{for } (x - 0.1) < 0 \\ 0 & \text{for } (x - 0.1) \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

計算格子間隔は $\Delta x = 0.01$ 、 $\Delta t = 0.005$ で、 $t = 0.6$ まで計算を行った。図-4に計算結果を示す。6-pointスキーム、QUICKとも不連続面近傍で数値振動が発生しているが、振動は6-pointスキームによる解の方が若干大きいようである。

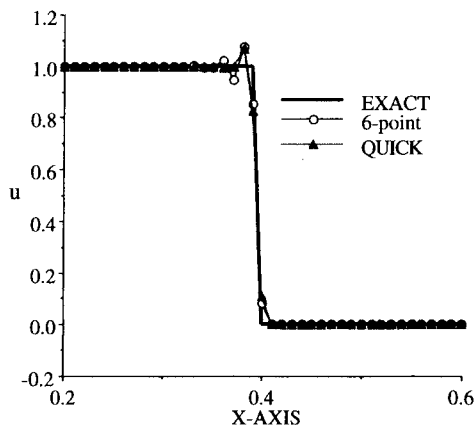


図-4 計算結果(非線形移流問題)

4. あとがき

保存形式の6-pointスキームはQUICKと比較して数値振動が大きいようである。今後はフラックス制限関数を導入し、高精度と高解像度の二つの性質を持つ計算スキームの開発を進めて行く予定である。

参考文献

- 1) Komatsu, T., Holly Jr., F.M., Nakashiki, N. and K. Ohgushi : Numerical Calculation of Pollutant Transport in One and Two Dimension, J.H.H.E., Vol.3, No.2, pp.15-30, 1985
- 2) 大串・小松・朝位：非線形移流項の卓越した流れの計算、水工学論文集、第34巻、pp.647-652、1990