

マコーマック法を用いた構造物まわりの非定常流計算

九州工業大学工学部 学生員 ○山口 学、サニット ウォンサ
同 上 正 員 秋山 壽一郎、浦 勝

1. はじめに

本研究は、マコーマック法にJameson et al. (1971)の人工粘性が導入された2次元洪水数値モデルを不透水性水制を設置した開水路に適用し、構造物まわりの流況について非定常数値シミュレーションを行ったものである。

2. 2次元洪水数値モデル

2次元浅水流方程式の保存形の連続の式および運動方程式は、式(1)で与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{S} = 0 \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}$; $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + 0.5gh^2 \\ uvh \end{bmatrix}$; $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + 0.5gh^2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(S_{ox} - S_{fx}) \\ -gh(S_{oy} - S_{fy}) \end{bmatrix}$

ここに、 x, y =流下方向、幅方向距離、 h =水深、 u, v = x, y 方向の流速、 g =重力加速度、 S_{ox}, S_{oy} = x, y 方向の河床勾配、 S_{fx}, S_{fy} = x, y 方向の摩擦勾配であり、それぞれ次のように与えられる。ここで、 n =Manningの粗度係数である。

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}; \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (2)$$

マコーマック法は、式(3)の予測子段階と式(4)の修正子段階より成る2段階ステップの2次精度スキームであり、任意の計算時間ステップのアルゴリズムは次のように表される。

$$\mathbf{U}_{ij}^p = \mathbf{U}_{ij}^t - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (1-\alpha) \mathbf{E}_{i+1,j}^t - (1-2\alpha) \mathbf{E}_{ij}^t - \alpha \mathbf{E}_{i-1,j}^t \right\} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ (1-\beta) \mathbf{F}_{i,j+1}^t - (1-2\beta) \mathbf{F}_{ij}^t - \beta \mathbf{F}_{i,j-1}^t \right\} - \Delta t \mathbf{S}_{ij}^t \quad (3)$$

$$\mathbf{U}_{ij}^c = \mathbf{U}_{ij}^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (1-\alpha) \mathbf{E}_{i+1,j}^p - (1-2\alpha) \mathbf{E}_{ij}^p - \alpha \mathbf{E}_{i-1,j}^p \right\} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ (1-\beta) \mathbf{F}_{i,j+1}^p - (1-2\beta) \mathbf{F}_{ij}^p - \beta \mathbf{F}_{i,j-1}^p \right\} - \Delta t \mathbf{S}_{ij}^p \quad (4)$$

$$\mathbf{U}_{ij}^{t+1} = 0.5(\mathbf{U}_{ij}^t + \mathbf{U}_{ij}^c) \quad (5)$$

ここで、 $\Delta x, \Delta y$ = x, y 方向の刻み幅である。また、 p および c の添え字は、それぞれ予測子と修正子を意味している。 α および β は、差分の方向を決めるためのパラメーターであり、 $\alpha = \beta = 0.0, 1.0$ の時がそれぞれ前進差分、後退差分となる。マコーマック法の予測子と修正子の前進差分および後退差分の繰り返し計算に当っては、Fennema(1985)が提案した4ステップ法を採用した。 Δt は式(6)に示したCourant-Friedrich-Levy(CFL)の安定性条件に基づき算出した。ここに、 Cr =Courant数である。

$$\Delta t = \frac{\Delta x Cr}{\max(|u| + |v| + \sqrt{2gh})} \quad (6)$$

また、数値振動を抑えるため、式(7)、(8)に示したJameson et al.の人工粘性係数 k を用いた。つまり、式(5)で求められた $\mathbf{U}_{ij}^{t+1}$ は、最終的に式(9)で補正される。

$$\xi_{ij}^x = \frac{|h_{i+1,j} + 2h_{ij} + h_{i-1,j}|}{|h_{i+1,j}| + |2h_{ij}| + |h_{i-1,j}|}; \quad \xi_{ij}^y = \frac{|h_{i,j+1} + 2h_{ij} + h_{i,j-1}|}{|h_{i,j+1}| + |2h_{ij}| + |h_{i,j-1}|} \quad (7)$$

$$\xi_{i+1/2,j}^x = k \max(\xi_{ij}^x, \xi_{i+1,j}^x); \quad \xi_{i-1/2,j}^x = k \max(\xi_{ij}^x, \xi_{i-1,j}^x) \quad (8)$$

$$\mathbf{U}_{ij}^{t+1} = \mathbf{U}_{ij}^{t+1} + \left[\xi_{i+1/2,j}^x (\mathbf{U}_{i+1,j}^{t+1} - \mathbf{U}_{ij}^{t+1}) - \xi_{i-1/2,j}^x (\mathbf{U}_{ij}^{t+1} - \mathbf{U}_{i-1,j}^{t+1}) \right] + \left[\xi_{i,j+1/2}^y (\mathbf{U}_{i,j+1}^{t+1} - \mathbf{U}_{ij}^{t+1}) - \xi_{i,j-1/2}^y (\mathbf{U}_{ij}^{t+1} - \mathbf{U}_{i,j-1}^{t+1}) \right] \quad (9)$$

3. 計算結果

計算領域は、長さ990m×幅200mの長方形水路の中に長さ80m×幅20mの水深と比較して十分に高い不透過性水制を流入点から480m下流に設置したものである(図1)。計算においては、上・下流端の全幅にわたって開境界として流入・流出を行い、上流端の流入条件として流量ハイドログラフ($q=0.004t$)を与えた。ここに、 q =単位幅流入流量(m^2/s)および t =時間(s)である。計算条件は、Manningの粗度係数 $n=0.010$ 、河床勾配 $S_0=0.0$ 、初期水深=2.00m、Courant数 $Cr=0.5$ 、人工粘性係数 $k=0.1$ である。

図2～3は、 $t=500s$ における水制まわりの等水深図、流速ベクトル図である。水深が水制の前方で盛り上がり、側面でわずかに沈んでいる様子が分かる。また、水制の後方で大きな渦が発生している様子が分かる。図4～6は、 $t=500s$ における水制付近の流速 u 、 v 、水深 h およびフルード数 Fr の横断面方向分布を示したものである。

今後は、実験値との比較を行うことによって、モデルの予測制度について定量的検討を加える予定である。

参考文献：[1] Jameson et al.(1981), AIAA 14th Conf., [2] Fennema, R. J. (1985), Ph. D. Dissertation,

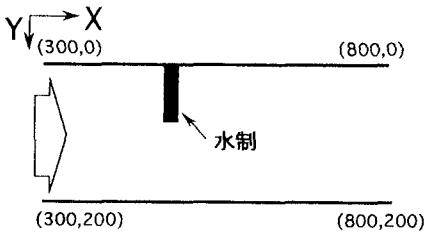


図1 計算領域

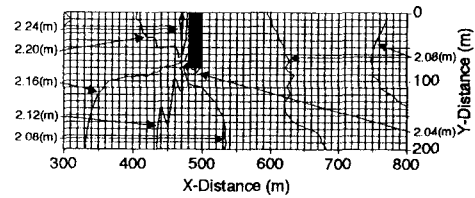


図2 等水深図 ($t=500s$)

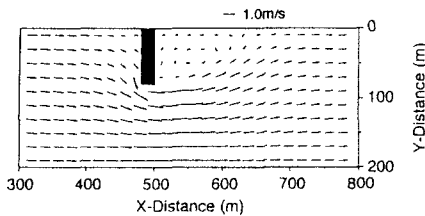


図3 流速ベクトル図 ($t=500s$)

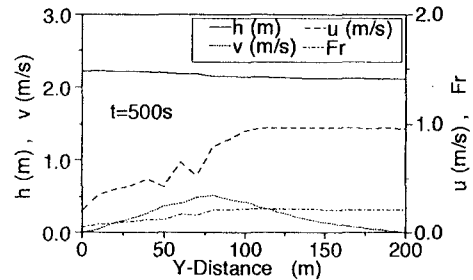


図4 横断面水理量 ($X=450m$)

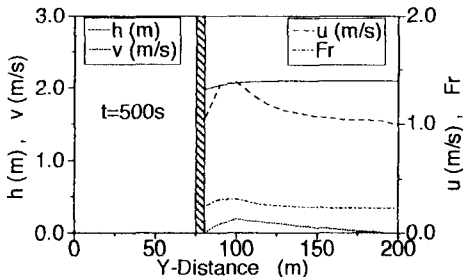


図5 横断面水理量 ($X=490m$)

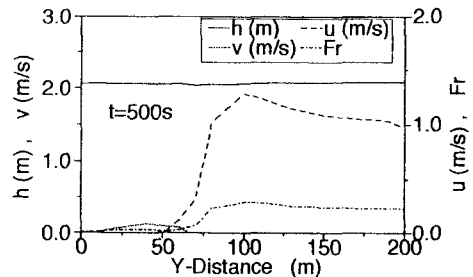


図6 横断面水理量 ($X=530m$)