

配水管網における配水池水頭、粗度係数などの逆解析

九州産業大学 正員 加納正道

九州産業大学 正員 赤坂順三

九州産業大学 学員○徳富泰則

1. まえがき ここでは、配水管網計算により水道水環境を管理する一環として、配水管網計算のための有限要素法と逆解析手法を結び付け、管網計算を行う上で推定を必要とする配水管の粗度係数および配水池水頭を同定するものです。

2. 基礎式と線形化による有限要素法

2.1 基礎方程式 管網計算には流量式、節点方程式、閉管路方程式、流入出平衡式の4個の式が用いられる[文献1]。

2.2 線形化による管網計算有限要素法 管内摩擦損失水頭と流量の節点値の置き換えと線形化を行い、次式を得ることができる。これを求めれば管網計算用の有限要素法ができる[文献1]。

$$[K]\{h\} = Q_{i \text{ out}} \quad (1)$$

3. 管網計算における逆解析

3.1 抵抗係数および粗度係数の同定 粗度係数等の逆解析の手順は図1に示すとおりである。

3.1.1 観測式と拡張カルマンフィルター 観測点の水頭を測定し、流速係数を逆解析する場合の管網計算における観測式は次式となる[文献2]。

$$\{h_i^*\} = \{h_i(C)\} + \{V_i\} \quad (2) \quad \text{ここに、} h_i^* \text{は水頭の観測値、} h_i \text{は水頭の推定値、} V_i \text{は誤差、} h_i(C) \text{は} C \text{に関して非線形である。非線形項をテーラー展開によって線形化し次式を得る。}$$

$\{h_i(C)\} = \{h_i(\bar{C})\} + \{H_i\}\{C - \bar{C}\} + \dots \quad (3) \quad \text{ここに、} \bar{C} \text{は既知項、} \{H_i\} = \{\partial h_i / \partial C\}$ はHマトリックス(又はsensitive matrix)を示す。式(3)の高次式を無視し、式(2)に代入し整理すれば、次の拡張カルマンフィルターが定まる。

$$\{\eta_i^*\} = \{H_i\}\{C\} + \{V_i\} \quad \{\eta_i^*\} = \{H_i\}\{h_B\} + \{V_i\} \quad (4)$$

ここに、左辺は次のようになる。

$$\{\eta_i^*\} = \{h_i^*\} - \{h_i(\bar{h}_B)\} + \{H_i(\bar{h}_B)\} \quad (5)$$

3.1.2 Hマトリックスの表示 カルマンフィルターにより解析する場合、Hマトリックスをどう表すかが重要となる。

(1) Hazen-Williams式のHマトリックス

流量式 $h = rQ^m$ より次式となる。

$$h = aC^{-1.85} Q^{1.85}, \quad a = 10.666 D^{-4.87} L \quad (6), (7)$$

有限要素法による解析手順を簡略表示しよう。

$$Kh = Q, \quad h = K^{-1}Q, \quad [C^{1.85} \cdot b]h = Q \quad (8), (9), (10)$$

式(10)の両辺に $K^{-1}(K \text{の逆行列})$ をかけて整理すれば

$$C^{1.85} K^{-1} b h = K^{-1} Q \quad (11)$$

$$C^{1.85} K^{-1} b K^{-1} Q = h \quad (12)$$

式(12)の両辺をで微分して

$$\frac{\partial h}{\partial C} = 1.85 K^{-1} b K^{-1} Q C^{0.85} \quad (13)$$

ここで、 $C^{0.85}$ を $\{C^{0.85}\} = \{\hat{C}^{0.85\gamma} \cdot \hat{C}^{0.85(1-\gamma)}\}$ と既知項で置き換えれば次式が得られる。

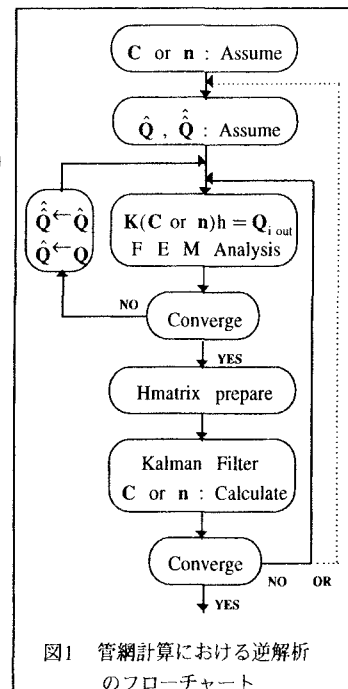


図1 管網計算における逆解析のフローチャート

$$\frac{\partial h}{\partial C} = 1.85 K^{-1} b K^{-1} Q \left\{ \hat{C}^{0.85\gamma} \cdot \hat{C}^{0.85(1-\gamma)} \right\} \quad (14)$$

ここに、 $\hat{C}$, $\hat{C}$ は繰り返し計算における1回目と2回目の既知の抵抗係数であり、 $\gamma = 0.8$ としている。式(13)より全ての点から構成される $\partial h / \partial C$ の中から観測点に関する $\partial h_{obs} / \partial C$ を選び出すことにより C のためのHマトリックスが表示できた。

(2) Manning式のHマトリックス

式(2)～(5)において C を n と読み替え、流量式 $h = rQ^m$ を次式とおく。

$$h = a' n^2 Q^2, \quad a' = 0.0827 \times 124.5 D^{-5.33} L \quad (15), (16)$$

次に式(8)～(13)におけると同様な操作を行い、最終的に式(17)が得られる。

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 2 K^{-1} b K^{-1} Q \left\{ \hat{n}^{-3\gamma} \cdot \hat{n}^{-3(1-\gamma)} \right\} \quad (17)$$

ここで、 $\hat{n}$, $\hat{n}$ は繰り返し計算における1回目と2回目の既知の粗度係数であり、 $\gamma = 0.8$ である。式(17)より全ての点から構成される $\partial h / \partial n$ の中から観測点に関する $\partial h_{obs} / \partial n$ を選び出すことにより n のためのHマトリックスが表示できた。

3.2 配水池水頭の推定 配水池水頭の逆解析の手順は上述の3.1に下記のような変更を行う。

3.2.1 観測式と拡張カルマンフィルター 観測点の水頭を測定し、配水池水頭(h_B)を逆解析する場合の管網計算における観測式は次式となる。

$\{h_i^*\} = \{h_i(h_B)\} + \{V_i\} \quad (18)$ ここに h_i^* 、 h_i 、 V_i は3.1と同様であり、 h_B は推定する配水池水頭、 $h_i(h_B)$ は h_B に関して非線形である。非線形項をテーラー展開によって線形化し次式を得る。

$\{h_i(h_B)\} = \{h_i(\bar{h}_B)\} + \{H_i\}(\{h_B\} - \{\bar{h}_B\}) + \dots \quad (19)$ ここに、 $\bar{h}_B$ は既知項、 $\{H_i\} = \{\partial h_i / \partial h_B\}$ はHマトリックス(又はsensitive matrix)を示す。式(19)の高次式を無視し、式(18)に代入し整理すれば、次の式(20)の拡張カルマンフィルターが定まる。ここに、左辺は次の式(21)のようになる。

$$\{\eta_i^*\} = \{H_i\}(h_B) + \{V_i\} \quad (20), \quad \{\eta_i^*\} = \{h_i^*\} - \{h_i(\bar{h}_B)\} + \{H_i(\bar{h}_B)\} \quad (21)$$

3.2.2 Hマトリックスの表示 カルマンフィルターにより解析する場合、 $\{\partial h_i / \partial h_B\}$ (Hマトリックス)をどう表すかが重要となる。

(1)Hazen-Williams式のHマトリックス

式(1)を変形して

$$\hat{K} h = \hat{Q}_{out}(\bar{h}_B, h_B) \quad (22)$$

ここに h_B ：同定したい配水池水頭、 $\bar{h}_B$ ：規定されている配水池水頭

式(22)を h_B で微分して式(23)が得られ、 $\partial \hat{K} / \partial h_B = 0$ となるから式(24)となる。そして具体的には j を同定したい配水池番号として式(25)が得られる。

$$\frac{\partial \hat{K}}{\partial h_B} h + \hat{K} \frac{\partial h}{\partial h_B} = \frac{\partial \hat{Q}_{out}}{\partial h_B} \quad (23), \quad \hat{K} \frac{\partial h}{\partial h_B} = \frac{\partial \hat{Q}_{out}}{\partial h_B} \quad (24), \quad \hat{K} \frac{\partial h}{\partial h_B(j)} = \frac{\partial \hat{Q}_{out}}{\partial h_B(j)} \quad (25)$$

式(25)を解いて観測点に関する情報 $\partial h / \partial h_B(j)$ を取り出す。

(2)Manning式のHマトリックス

(1)のHazen-Williams式のHマトリックスと同様な操作を行い式(25)が得られ、式(25)を解いて観測点に関する情報 $\partial h / \partial h_B(j)$ を取り出す。

4. まとめ 抵抗係数及び粗度係数について解の安定性及び収束性がよく、得られた値の誤差が5%以下で満足できるものであると考えられます。配水池水頭の逆解析については、計算中であり発表時に述べたい。

5. 参考文献 1) 加納正道、黒木健実：土木解析学演習、理工図書、1993

2) 片山 徹：応用カルマンフィルター、朝倉書店、1994