土木学会西部支部研究発表会(1996.3)

二段階制御法によるケーブルの動的解析

熊本大学工学部　○学生員　佐藤　洋輔
同　上　正　員　三池　亮次
同　上　正　員　小林　一郎
熊本大学工学研究科　学生員　東　高徳

1. はじめに

不安定構造である折線ケーブルに外力が作用するときの”形態決定問題”について後藤[1]らは、接線剛性マトリックスを用い荷重制御法に従って大変形構造解析をおこなっている。しかしながら、部材応力が零、または零に近い場合には、接線剛性マトリックスは特異または疑似特異となって解が不能、または、収斂が悪くなる。この問題を解決するために我々はさきに２段階制御法[2]を提案した。

第１段階として、不安定次数だけ、ある節点方向に変位（制御変位）を与え静定とする。この制御変位方向の反力を求める。第２段階として、制御変位方向の与えられた外力と、第１段階において得られる制御変位方向の計算反力との不釣り合い力を解消するように、制御変位方向以外の外力の増分は零の条件の下で接線剛性マトリックスの修正と、荷重制御法による第２段階増分変位を求める。これを繰り返し、ケーブルの釣り合い力を決定する。

本研究において折れ線ケーブルの運動を解析するのであるが、大変形構造解析には上述の二段階制御法を適用するとともに、時間積分スキームとして従来とは異なる新しい手法を提案する。

2. 大変形構造解析の基礎式

筆者らは先に有限変位仮想仕事の定理に従って、接続マトリックスを用いた次のような大変形構造解析の基礎式を誘導した。すなわち、変形の中間状態の荷重 $\mathbf{P}'$ からの増分荷重 $\Delta\mathbf{P}$ と、変形 $\mathbf{d}'$ からの増分変位 $\Delta\mathbf{d}$ のあいだに

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{d} + \mathbf{b} \tag{1}$$

があるとする。ここに $\mathbf{K}$ は変形後の剛性マトリックス、 $\mathbf{b}$ は有限変位に関する補正項であり、

$$\mathbf{K} = (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})^T \tag{2}$$

$$\mathbf{b} = \Delta\mathbf{C}\mathbf{P}'_m - (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{e}_\theta \tag{3}$$

$\mathbf{C}'$ は中間状態における接続マトリックス、$\Delta\mathbf{C}$ はそれの増分、 $\mathbf{K}_m$ は応力として軸力のみの場合には、 $k = EA'_I/L'_I$ を要素とする対角マトリックス、Eはヤング率、Aは断面積、Lは部材長で添字Iは第I部材、プライム $\prime$ は中間状態における値であることを示す。添字Tは転置記号である。$\Delta\mathbf{e}_\theta$ は、大変形ひずみの補正項であり、変形の中間状態からの部材回転角を $\Delta\theta_I$ とすると、第I部材のひずみ補正項 $\Delta\mathbf{e}_{\theta,I}$ は、 $(1-\cos\Delta\theta_I)L'_I$ を要素とするベクトルとなる。変形後の接続マトリックス $\mathbf{C} = \mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C}$ であり、変形後の断面力 $\mathbf{P_m}$ と $\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \Delta\mathbf{P}$ の間には、次式が成立する。なお、変形後の変位 は $\mathbf{d} = \mathbf{d}' + \Delta\mathbf{d}$ である。

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\mathbf{P}_m \tag{4}$$

中間状態における $\Delta\mathbf{P}$ の変分は、

$$\delta\Delta\mathbf{P} = \mathbf{K}_T\delta\Delta\mathbf{d} \quad , \quad \mathbf{K}'_T = \mathbf{K}'_E + \mathbf{K}'_G \tag{5}$$

となる。ここに、$\mathbf{K}'_E$ 弾性剛性マトリックス、$\mathbf{K}'_G$ は幾何剛性マトリックス、 $\mathbf{K}'_T$ は接線剛性マトリックスであり、

$$\mathbf{K}'_G = \left[\frac{\partial(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_{\Delta\mathbf{d}=0}\mathbf{P}'_m \tag{6}$$

となる。ここに$\left[\dfrac{\partial(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]$ は立体マトリックスであり、

$$\left[\frac{\partial(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_{\Delta\mathbf{d}=0}\mathbf{P}'_m = \left[\frac{\partial(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d_1}\mathbf{P}'_m \quad \frac{\partial(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})}{\partial\Delta d_2}\mathbf{P}'_m \quad \cdots \right]_{\Delta\mathbf{d}=0} \tag{7}$$

である。接続マトリックスの場合は、 $\mathbf{C}$ を構成する部材の方向余弦ベクトルの微分として容易に求めることができる。

3. ケーブルの運動方程式の数値計算

ケーブルの増分形運動式は、(1)式において（質量×加速度）を慣性力と考えて、これを、外力として左辺に組み込むことによって得られる。計算の第 $I+1$ ステップの加速度ベクトル $\mathbf{a}_{I+1}$ は第 $I+1$ ステップにおける荷重と変位の増分を $\overline{\Delta\mathbf{P}}_I, \overline{\Delta\mathbf{d}}_I$ とすると、

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{I+1} &= \left\{\left(\frac{\overline{\Delta\mathbf{d}}_{I+1}}{\Delta t} - \frac{\overline{\Delta\mathbf{d}}_I}{\Delta t}\right) - \left(\frac{\Delta\mathbf{d}_I}{\Delta t} - \frac{\Delta\mathbf{d}_{I-1}}{\Delta t}\right)\right\}\frac{1}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t^2}(\overline{\Delta\mathbf{d}}_{I+1} - 2\overline{\Delta\mathbf{d}}_I + \overline{\Delta\mathbf{d}}_{I-1})\end{aligned} \tag{8}$$

また簡単のために、質量は折線ケーブルの節点に集中、質量マトリックスを M として、第 I ステップにおける運動方程式は (8) 式を (1) 式に代入し次のようになる。

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{M}\frac{1}{\Delta t^2}+\mathbf{K}_{I+1}\right)\overline{\Delta\mathbf{d}}_{I+1}+\mathbf{b}_{I+1} &= \overline{\Delta\mathbf{P}}_{I+1}+\mathbf{M}(2\overline{\Delta\mathbf{d}}_{I}-\overline{\Delta\mathbf{d}}_{I-1})/\Delta t^2 \\ &\equiv \overline{\Delta\mathbf{f}}_{I+1} \end{aligned} \tag{9}$$

(9) 式の $\mathbf{K}_{I+1},\mathbf{b}_{I+1}$ は I+1 ステップにおける変位増分 $\Delta\mathbf{d}_{I+1}$ の関数であるので、これを $\Delta\mathbf{d}_{I+1}$ に関して Taylor 展開すると、接線剛性マトリックス $\mathbf{K}_T$ を用い、

$$\left(\mathbf{M}\frac{1}{\Delta t^2}+\mathbf{K}_{T,I+1}\right)\delta\Delta\mathbf{d}_{I+1} = \delta\Delta\mathbf{f}_{I+1} \tag{10}$$

これより、第 I+1 ステップの最初のイテレーションの増分変位

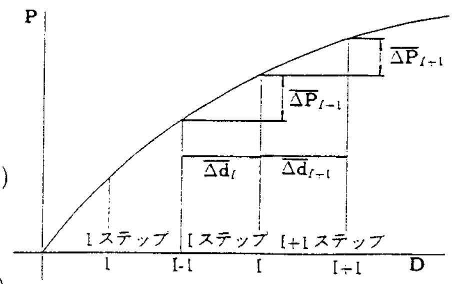
$$\Delta\mathbf{d}^{(0)}_{I+1}=\left(\mathbf{M}\frac{1}{\Delta t^2}+\mathbf{K}^{(0)}_{T,I+1}\right)^{-1}\overline{\Delta\mathbf{f}}_{I+1}\equiv\mathbf{K}^{-1}_{I+1,FT}\overline{\Delta\mathbf{f}}_{I+1} \tag{11}$$

とする。$\Delta\mathbf{d}^{(0)}_{I+1}$ に対応する $\Delta\mathbf{f}^{(1)\prime}_{I+1}$ は (1) 式に従い、

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{f}^{(1)\prime}_{I+1} &= \left(\mathbf{M}\frac{1}{\Delta t^2}+\mathbf{K}^{(0)}_{I+1}\right)\Delta\mathbf{d}^{(0)}_{I+1}+\mathbf{b}^{(0)}_{I+1} \\ &= \mathbf{M}\frac{1}{\Delta t^2}\Delta\mathbf{d}^{(0)}_{I+1}+\Delta\mathbf{P}^{(1)\prime}_{I+1} \\ \Delta\mathbf{P}^{(1)\prime}_{I+1} &= \mathbf{K}^{(0)}_{I+1}\Delta\mathbf{d}^{(0)}_{I+1}+\Delta\mathbf{b}^{(0)}_{I+1}\end{aligned} \tag{12}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{f}^{(1)}_{I+1} &= \overline{\Delta\mathbf{f}}_{I+1}-\Delta\mathbf{f}^{(1)\prime}_{I+1} \\ &= \mathbf{M}\frac{1}{\Delta t^2}(\overline{\mathbf{d}}_{I+1}-\Delta\mathbf{d}^{(0)}_{I+1})+(\overline{\Delta\mathbf{P}}_{I+1}-\Delta\mathbf{P}^{(1)\prime}_{I+1}) \\ &= \mathbf{M}\frac{1}{\Delta t^2}\Delta\mathbf{d}^{(1)}_{I+1}+\Delta\mathbf{P}^{(1)}_{I+1}\end{aligned} \tag{13}$$



図－1　P～d 曲線、第I、I+1 ステップにおける荷重と変位増分$\overline{\Delta\mathrm{P}}$、$\overline{\Delta\mathrm{d}}$図

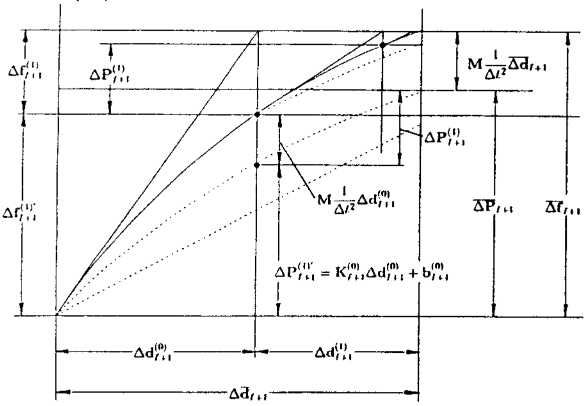
したがって

$$\delta\mathbf{f}^{(1)}_{I+1} = \mathbf{M}\frac{1}{\Delta t^2}\delta\Delta\mathbf{d}^{(1)}_{I+1}+\delta\mathbf{P}^{(1)}_{I+1} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{d}^{(1)}_{I+1} &= \left(\mathbf{M}\frac{1}{\Delta t^2}+\mathbf{K}^{(1)}_{T,I+1}\right)^{-1}\Delta\mathbf{f}^{(1)}_{I+1} \\ &\equiv \mathbf{K}^{(1)-1}_{FT,I+1}\Delta\mathbf{f}^{(1)}_{I+1}\end{aligned} \tag{15}$$

$\mathbf{K}_{FT,I+1}$ は、慣性力を考慮した接線剛性マトリックスで (11),(15) 式からわかるように $\mathbf{K}^{(1)}_{T,I+1}$ と $\mathbf{M}\frac{1}{\Delta t^2}$ の和である。

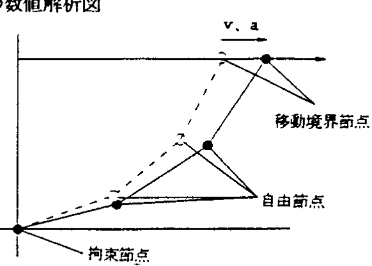
以下同様、イテレーションを繰り返す。上記は静止ケーブルのつり合い式計算における荷重項 $\Delta\mathbf{P}_{I+1}$ の代わりに $\Delta\mathbf{f}_{I+1}$ を、$\mathbf{K}_T$ の代わりに $\mathbf{K}_{FT}$ を用いた荷重分割法となるが、これを制御変位節点と自由変位節点の２群に分けて、二段階制御法を適用し、運動ケーブルの数値計算を進める。



図－2　Newton-Raphson 法によるケーブルの運動の数値解析図

4. 適用

浮き防波堤のアンカーケーブルのように、上端がある速度で移動する場合、上端は移動境界節点となる。この移動境界節点は、各ステップの最初の変位制御計算のときは制御変位節点、次の荷重制御法計算では拘束境界節点と考えて解析を行い、各ステップごとに慣性力を考慮したつり合い形状を決定する。



図－3　ケーブルの運動

参考文献

1) 後藤茂夫他、非線形有限変形法によるトラスの大変形解析とその応用プログラム、1971
2) 佐藤、小林、三池、東、二段階制御法による折れ線ケーブル構造解析、構造工学における数値解析法シンポジウーム、1995