

ケーブルの支点が変動する場合の非線形応答解析

長崎大学工学部 学生員 ○ HERATH, M.C.R. 長崎大学工学部 正 員 高橋 和雄
 長崎大学工学部 学生員 山口 健市 長崎大学工学部 学生員 花田 博史

1. まえがき

ケーブルに現れる振動問題は、非常に多岐にわたり、特に非線形振動は、興味深い現象が多くみられ注目されている。非線形現象の一つの例として、走行荷重などによる斜張橋の桁が周期的振動を受けることによって支持ケーブルに振動が生じる、いわゆる係数励振振動問題が挙げられる。著者らは、ケーブルの支点が動かない場合の周期的変動軸力を受けるケーブルの動的安定解析を行ってきたが、ケーブルの支点に作用する力は支点変位によって与えられることを考慮すると、ケーブルの支点が動く場合の解析を行う必要がある。そこで、本研究においては、傾斜したケーブルが周期的な支点変位を受ける場合¹⁾について2自由度までを考慮し、1次および2次振動の非線形連成項を介して発生する分岐応答を調和バランス法を用いて、ケーブル長、ケーブルの傾斜角および支点変位をパラメータとして解析する。ついで、Runge-Kutta-Gill法を適用して、時間応答解析を行い、解析の精度を検討する。

2. 解法

図-1に示すような周期的な支点変位を受ける傾斜ケーブルの応答 y を、1次および2次振動を考慮して次のように仮定する¹⁾。

$$y(x, t) = (X \sin \theta) \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sin \Omega t + P_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} + P_2(t) \sin \frac{2\pi x}{L} \quad (1)$$

ここに、 L : ケーブルのスパン長、 X : 支点変位の振幅、 x : スパン方向の座標、 Ω : 支点変位の円振動数、 θ : ケーブルの傾斜角、 P_1, P_2 : 1次および2次振動の時間関数。 y : たわみ

ケーブルのひずみエネルギー、運動エネルギーおよび重力のなす仕事を用いて、Hamiltonの原理を適用し、さらに粘性減衰力を考慮すると、次のような連立非線形常微分方程式が得られる¹⁾。

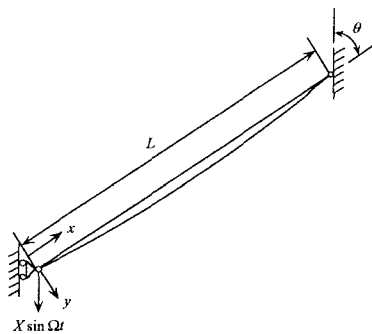


図-1 ケーブルの一般図

$$\ddot{P}_1 + 2h_1 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^4 \lambda^2 \right\} \dot{P}_1 + \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^4 \lambda^2 + \left(\psi \cos \theta - \frac{\lambda \eta}{2\sqrt{3}} \sin \theta \right) \sin \omega \tau + \frac{1}{6} (\eta \sin \theta)^2 (\sin \omega \tau)^2 \right] P_1 \quad (2)$$

$$- \frac{4\sqrt{3}}{\pi^2} \lambda \left(P_1^2 + \frac{4}{3} P_2^2 \right) + \frac{4}{3} P_1^3 + \frac{16}{3} P_1 P_2^2 = \frac{1}{2} \eta \left[\left(\omega^2 - \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \right) \sin \theta + \frac{2}{\kappa} \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \cos \theta \right] \sin \omega \tau + \frac{\sqrt{3}}{6\pi^2} \lambda (\eta \sin \theta)^2 (\sin \omega \tau)^2$$

$$\ddot{P}_2 + 4h_2 \dot{P}_2 + 4 \left[1 + \left(\psi \cos \theta - \frac{\lambda \eta}{2\sqrt{3}} \sin \theta \right) \sin \omega \tau + \frac{1}{6} (\eta \sin \theta)^2 (\sin \omega \tau)^2 \right] P_2 \quad (3)$$

$$- \frac{8\sqrt{3}}{3\pi^2} \lambda P_1 P_2 + \frac{4}{3} P_1^2 P_2 + \frac{16}{3} P_2^3 = \frac{1}{4} \eta \omega^2 \sin \theta \sin \omega \tau.$$

ここに、 $\tau = \omega_0 t$: 無次元時間、 ω_0 : 弦の1次の固有円振動数、 $\omega = \Omega / \omega_0$: 支点変位の無次元円振動数、 $\psi = X / X_0$: 振幅比、 X_0 : 緊張したときの伸び、 $\eta = X / (X_0 L / 3)^{1/2}$: 振幅比、 $\chi = mg \sin \theta / F_0$ 、 mg : ケーブルの単位長さあたりの重量、 F_0 : 静的軸力、 $\kappa = \chi L$ 、 $\lambda = \kappa / (F_0 / ES)^{1/2}$ 、 E : ヤング率、 S : 断面積、 h_1, h_2 : 1次および2次振動の減衰定数。

式(2),(3)の分岐解には、それぞれ固有円振動数付近に生じる周期 T をもつ副不安定領域および2倍の固有円振動数付近に生じる周期 $2T$ をもつ主不安定領域が重要であることから、式(2),(3)の解を次のように仮定することができる。

$$P_1 = C_0 + C_{1/2} \cos \frac{\omega \tau}{2} + S_{1/2} \sin \frac{\omega \tau}{2} + C_1 \cos \omega \tau + S_1 \sin \omega \tau \quad (4)$$

$$P_2 = \bar{C}_0 + \bar{C}_{1/2} \cos \frac{\omega \tau}{2} + \bar{S}_{1/2} \sin \frac{\omega \tau}{2} + \bar{C}_1 \cos \omega \tau + \bar{S}_1 \sin \omega \tau \quad (5)$$

ここに、 $C_0, C_{1/2}, S_{1/2}, C_1, S_1$: 1次振動の振幅成分、 $\bar{C}_0, \bar{C}_{1/2}, \bar{S}_{1/2}, \bar{C}_1, \bar{S}_1$: 2次振動の振幅成分。

式(4),(5)を式(2),(3)に代入して、調和バランス法を適用すれば、未定定数を求める連立非線形代数方程式が得られる。これに Newton-Raphson 法を用いて、仮定した初期値のもとに解けば、それぞれの振幅成分が得られる。また、式(2),(3)を4元連立の1階常微分方程式に変換し、Runge-Kutta-Gill 法を適用して直接数値積分すれば、時間応答が得られ、解析解の検証ができる。

3. 数値結果

図-2, 3には、ケーブル長 $L=25\text{m}$ 、ケーブルの傾斜角 $\theta=10^\circ$ 、支点変位の振幅 $X=2.56\text{cm}$ (スパンの $1/10000$) の場合の非線形連成項を無視した1次および2次振動の応答曲線を示す。横軸は、支点変位の無次元円振動数 ω 、縦軸は、無次元応答振幅および実振幅である。両者とも固有円振動数($\omega_1 \approx 1.0, \omega_2 \approx 2.0$)とその2倍の振動数領域において、応答が顕著に現れている。

連成項を考慮した場合の1次および2次振動においては、1次振動の主不安定領域と2次振動の副不安定領域が共存し、連成振動が生じることが考えられる。図-4には、 $\omega=2$ 付近における連成項を考慮した場合の1次および2次振動の応答曲線を示す。図に示すように、1次および2次の連成振動は、 $\omega=2$ 付近の振幅の小さい特定の振動数領域のみ現れる。この領域においては、 ω の増加にともない両者の振幅は互いに成長していくが、やがて、1次振動の振幅のみが減少する。さらに、 ω を増加させると、互いに連成しない単独の応答が現れ、成長していく傾向がある。シミュレーションによる結果においても、同様な結果が得られている。

4. まとめ

ここでは、非線形連成項の有無による1次および2次振動の応答を示した。ケーブル長、ケーブルの傾斜角および支点変位による影響についての詳細は、講演時に発表する。

参考文献

- 1) A. Pinto da Costa, J. A. C. Martins : The Nonlinear Oscillations of Inclined Excited Periodic Motions of Their Supports, International Symposium on Cable Dynamics, pp. 205~212, 1995.

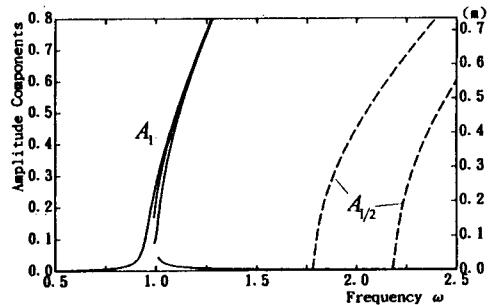


図-2 連成項を無視した場合の1次振動の応答曲線

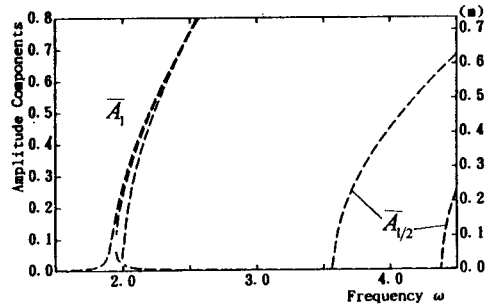


図-3 連成項を無視した場合の2次振動の応答曲線

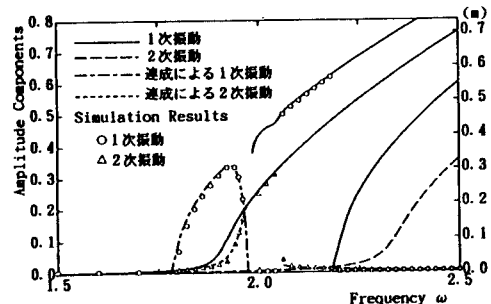


図-4 連成項を考慮した1次および2次振動の応答曲線