

自由端に面内集中荷重を受ける片持ち板の振動、座屈および動的安定

長崎大学工学部 学生員 ○呉 明強

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

1. まえがき 平板に面内力が作用する場合の座屈特性はかなり解析されているが、周期的変動面内力が作用する場合の動的安定については、不十分な点が認められる。著者らは動的安定問題を解析してきているが、片持ち長方形板に面内集中荷重が作用した場合の座屈や動的安定はまだ解析されていないようである。そこで、本研究では、片持ち長方形の自由端に面内集中荷重が作用する場合の自由振動、座屈、および動的安定をエネルギー法に基づく、Rayleigh-Ritz 法¹⁾を用いて解析する。数値解析において、長方形の縦横比および荷重の大きさの影響を明らかにする。

2. 片持ち板の自由端に面内集中荷重 P を作用する場合の面内力 図-1 に示すような片持ち長方形板の自由端に y 軸方向に面内集中荷重が作用する場合の面内力 N_x 、 N_y は次のように与えられる²⁾。

$$N_x = -\frac{12P}{b^3} \left(y - \frac{b}{2} \right) (a - x) \quad (1) \quad N_y = -\frac{6P}{b^3} \left(y - \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3P}{2b} \quad (2)$$

3. ポテンシャルエネルギーおよび解法³⁾ 一定の面内力を受ける場合の長方形板の自由振動を考える。長方形のひずみエネルギー V 、面内力による仕事 U 、および長方形板の運動エネルギー T は、次のように与えられる。

$$V(w) = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a D \left[(\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] dx dy \quad (3)$$

$$U(w) = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (4)$$

$$T(w) = \frac{\rho}{2} \int_0^b \int_0^a h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (5)$$

ここに $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$: 板剛度、 E : ヤング率、 t : 時間、 ν : ポアソン比、 ρ : 板の密度、 w : たわみ
この場合の全ポテンシャルエネルギーは次式となる。

$$W(w) = V(w) - U(w) - T(w) \quad (6)$$

一般解を次のように仮定する。

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} h_m(\xi) \bar{h}_n(\eta) \exp(i\omega t) \quad (7)$$

ここに、 h_m : 片持ちばりの固有振動形、 $\bar{h}_n$: 両端自由ばりの固有振動形、 A_{mn} : 未定常数、 $\xi = x/a$ 、 $\eta = y/b$ 、 ω : 固有円振動数。

次に、時間 t および N_x 、 N_{xy} に関して無次元化した式(6)に式(7)を代入し、Rayleigh-Ritz 法を適用する。

$$\frac{\partial}{\partial A_{rs}} (V - U - T) = 0 \quad \text{ここに、} \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

式(8)の偏微分を行うと、次式が得られる。

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N A_{mn} (E_{mrns} - \lambda_y^4 F_{mrns} - \lambda_b G_{mrns}) = 0 \quad (9)$$

ここに、

$$E_{mrns} = \frac{1}{\beta^4} I_{mr}^2 \bar{I}_{ns}^1 + \frac{\nu}{\beta^2} (I_{mr}^3 + \bar{I}_{ns}^2 + I_{mr}^4 \bar{I}_{ns}^3) + I_{mr}^1 \bar{I}_{ns}^5 + \frac{2(1-\nu)}{\beta^2} I_{mr}^5 \bar{I}_{ns}^4$$

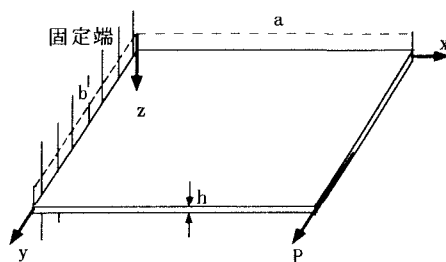


図-1 一般図

$$F_{mrns} = \frac{1}{\beta^2} I_{mr}^8 \bar{I}_{ns}^1, \quad G_{mrns} = (8I_{mr}^6 \bar{I}_{ns}^6 + I_{mr}^7 \bar{I}_{ns}^7 + I_{mr}^8 \bar{I}_{ns}^8) \left(\frac{3}{2\beta} \right), \quad \lambda_v^4 = \rho h \omega^2 b^4 / D$$

$$\lambda_b = Pb / D, \quad I_{mr}^1, \bar{I}_{ns}^2, \dots : \text{固有関数の定積分 (m, n, r, s = 1, 2, \dots, N)}$$

式(9)は次のように行列表示される。

$$([E] - \lambda_v^4 [F] - \lambda_b [G]) \{X\} = 0 \quad (10)$$

$$[E] = E \{s + (r-1)N, n + (m-1)N\} = E_{mrns}$$

$$[F] = F \{s + (r-1)N, n + (m-1)N\} = F_{mrns}$$

$$[G] = G \{s + (r-1)N, n + (m-1)N\} = G_{mrns}$$

$$\{X\} = \{A_{11}, A_{12}, A_{13}, \dots, A_{1N}, A_{21}, \dots, A_{2N}, \dots, A_{NN}\}^T$$

ここで、 $\lambda_b = 0$ とおけば自由振動の固有値 λ_v が得られる。

また、慣性項を無視すれば座屈固有値 λ_b が得られる。数

値計算においては、式(10)を行列の固有値問題に変換した

解析を行う。

3. 数値結果 (1)固有振動解析 集中荷重 $P=0$ の場合の結果は文献³⁾の結果と完全一致した。

(2)座屈解析 座屈の解の収束の状況を正方形の場合について調べると、図-2の結果となる。N=10項とればほぼ収束しており、本論文の解析では10項近似を採用する。図-3は片持ち正方形板の座屈モードを示す。長方形板がたわみとねじれを伴った波形で座屈している。これははりの横倒れ座屈モードと同じであるが、平板では断面の曲げ変形が含まれている。

解析の精度を直接比較する資料がないので、はりの横倒れ座屈の解析結果⁴⁾と比較すると、図-4の結果となる。縦横比 β が大きくなるとはりの結果と一致する。

4. まとめ 集中荷重が作用する場合の固有振動特性や動的安定については講演時に発表する。

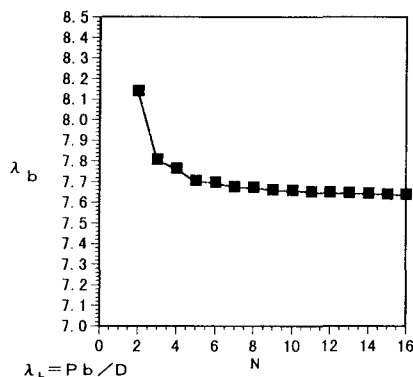


図-2 固有値の収束曲線

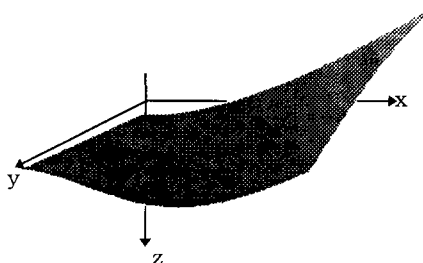


図-3 座屈モード

参考文献

1) 近藤 恭平: 振動論,

培風館, pp. 278-281, 1993

2) 関谷 壮、斎藤 渥: 薄

板構造力学, 共立, pp. 83-

95, 1968

3) 高橋、其田、古谷、夏

秋: 土木学会論文集, No.

519/I-32, pp. 175-184,

1995

4) C. R. C. JAPAN:

HANDBOOK OF STRUCTURAL

STABILITY, CORONA, pp. 1-112, 1971

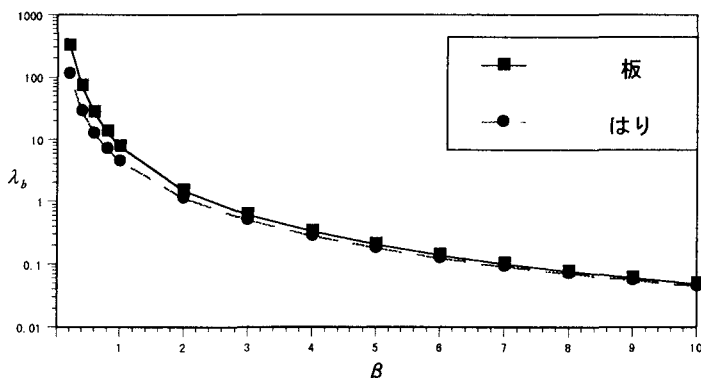


図-4 板とはりの座屈曲線