空間的に相関を有する不規則荷重を受ける構造物解析

(株)PAL構造　正員　○河角省治
長崎大学　工学部　正員　岡林孝敏
長崎大学　工学部　正員　崎山　毅

1. はじめに

道路橋活荷重，積雪荷重，積載荷重などの静的な外力は空間的に変動していると考えることができる．このような荷重を受ける構造物の信頼性解析では，空間的に相関を有する不規則分布荷重を受ける構造物の静的応答の確率特性を求めることが基礎となる．著者らは，静的不規則荷重が作用するはり，連続ばり，アーチ，および平面ラーメンの変動応答の分散・共分散を求める確立論的解析法を提案してきた[1)2)3)]．これらの解析法は，伝達マトリックス法を共分散行列に拡張した手法であり，各種構造物に対して統一的に適用できることが確認できた．ここでは，それらを取りまとめて報告する．

2. 構造部材の状態空間表示

対象となる構造は，伝達マトリックス法が適用できる構造であり，直列型のs本の部材からなるものとする．また，始端の0節点と終端のs節点には境界条件が与えられる．図-1，2に示すような，部材座標および不規則分布荷重を考えると，$\bar{k}$部材の状態変数ベクトル，外力ベクトル，さらに，状態方程式は一般的に次のように表される．

$$\mathbf{Y}_k(x) = [\, u(x)\ \ v(x)\ \ \phi(x)\ \ N(x)\ \ Q(x)\ \ M(x)\,]^T \tag{1}$$

$$\mathbf{F}_{Yk}(x) = [\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -q_{kx}(x)\ \ -q_{ky}(x)\ \ 0\ ]^T \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Y}_k(x) \;=\; \mathbf{A}_{Yk}(x)\,\mathbf{Y}_k(x) + \mathbf{F}_{Yk}(x)$$

$$\text{境界条件}\ \ :\ \ \mathbf{Y}_k(0) = \mathbf{Y}_k^L\,,\ \mathbf{Y}_k(l_k) = \mathbf{Y}_k^R \tag{3}$$

ここに，$\mathbf{A}_{Yk}(x)$は係数行列である．また，これらの式においてベクトル成分は対象構造に応じて増減する．例えば，連続ばりのように中間支点などの条件がある場合には，節点未知量を加えた拡大化した状態変数を用いる．また，状態変数を節点行列により伝達させることにより構造系の状態空間が構成される．

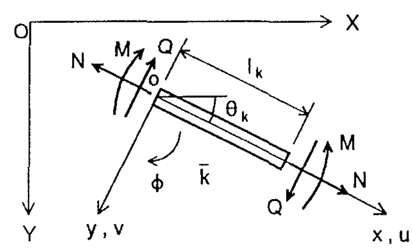

図-1　部材座標と変位成分・断面力成分

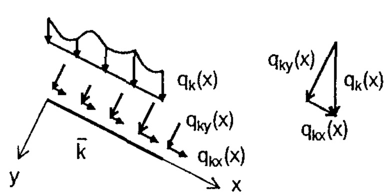

図-2　荷重成分

3. 不規則荷重のモデル化

不規則荷重は平均値と平均値回りの変動に分離され，対応する構造物の応答もやはり平均値と平均値回りの変動となる．$\bar{k}$部材に作用する不規則荷重の平均値回りの変動を，定常確率過程$\mathbf{Z}_k(x)$と確定関数$\mathbf{G}_{Yk}(x)$の積で表される非定常確率過程にモデル化する．このとき，$\mathbf{Z}_k(x)$は白色雑音過程を入力とする形成フィルターの出力より得られる．

$$\mathbf{F}_{Yk}(x) = \mathbf{G}_{Yk}(x)\,\mathbf{Z}_k(x) \tag{4}$$

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Z}_k(x) = \mathbf{A}_Z\,\mathbf{Z}_k(x) + \mathbf{N}_{Zk}(x) \tag{5}$$

ここに，$\mathbf{N}_{Zk}(x)$は平均値が0で，荷重強度$\mathbf{Q}_Z$を有する白色雑音過程ベクトルである．なお，不規則荷重を白色雑音過程でモデル化する場合，式(5)は$\mathbf{Z}_k(x) = \mathbf{N}_{Zk}(x)$のように表され，より簡易な定式が可能となる．また，$\mathbf{Z}_k(x)$を節点行列により伝達させることにより荷重系の状態空間が構成される．

4. 構造物－荷重系の不規則応答解析

$\bar{k}$部材の構造物－荷重系の状態方程式は，構造系の状態方程式(3)と荷重系の状態方程式(5)および式(4)を合成することにより，次式のように得られる．

$$\frac{d}{dx}\mathbf{X}_k(x) \ = \ \mathbf{A}_X(x)\,\mathbf{X}_k(x) + \mathbf{N}_{Xk}(x)$$

$$\text{境界条件} \ : \ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}_k^L\,,\ \mathbf{X}_k(l_k) = \mathbf{X}_k^R \qquad (6)$$

のように，白色雑音過程ベクトルを入力とする確率微分方程式で表される．ここに，状態変数ベクトル$\mathbf{X}_k(x)$，外力ベクトル$\mathbf{N}_{Xk}(x)$および係数行列$\mathbf{A}_X(x)$は合成され拡大化したものとなっている．

また，状態変数は$\overline{k}$部材終端から$\overline{k+1}$部材始端へ$\mathbf{X}_{k+1}^L = \mathbf{P}_{Xk}\,\mathbf{X}_k^R$ のように，節点行列$\mathbf{P}_{Xk}$により伝達される．

式(6)の解は，始端境界条件$\mathbf{X}_0$，状態遷移行列$\mathbf{\Phi}_X(x_1, x_2)$および，$j$点左から$k$点右への伝達行列$\Lambda(k,j)$を用いることで，次式のように与えられる．

$$\mathbf{X}_k(x) \ = \ \mathbf{\Phi}_{Xk}(x,0)\,\Lambda(k,0)\,\mathbf{X}_0$$
$$+\sum_{j=1}^{k}\{\mathbf{\Phi}_{Xk}(x,0)\,\Lambda(k,j)\times\int_0^{l_j}\mathbf{\Phi}_{Xj}(l_j,\lambda)\,\mathbf{N}_{Xj}(\lambda)d\lambda\}$$
$$+\int_0^{x}\mathbf{\Phi}_{Xk}(x,\lambda)\,\mathbf{N}_{Xk}(\lambda)\,d\lambda \qquad (7)$$

式(7)は応答の平均値回りの変動を表しており，これを共分散の定義に代入することで，次の共分散方程式を得る．

$$\frac{d}{dx}\mathbf{R}_{Xk}(x) \ = \ \mathbf{A}_{Xk}(x)\,\mathbf{R}_{Xk}(x) + \mathbf{R}_{Xk}(x)\,\mathbf{A}_{Xk}{}^T(x)$$
$$+\mathrm{E}\,[\,\mathbf{N}_{Xk}(x)\,\mathbf{X}_0{}^T\,]\,\Lambda^T(k,0)\,\mathbf{\Phi}_{Xk}{}^T(x,0)$$
$$+\mathbf{\Phi}_{Xk}(x,0)\,\Lambda(k,0)\,\mathrm{E}\,[\,\mathbf{X}_0\,\mathbf{N}_{Xk}{}^T(x)\,] + \mathbf{Q}_X$$

$$\text{境界条件} \ : \ \mathbf{R}_{Xk}^L = \mathbf{P}_{Xk-1}\mathbf{R}_{Xk-1}^R\mathbf{P}_{Xk-1}{}^T \qquad (8)$$

式(7),(8)に若干の操作を行うことで始端，終端の2点境界条件に関する連立方程式として，始端境界条件の共分散$\mathbf{R}_0$および始端境界条件と外力の相関関数$\mathrm{E}\,[\,\mathbf{X}_0\,\mathbf{N}_{Xk}{}^T(x)\,]$を得ることができる．これより式(8)は微分方程式の初期値問題のように解くことが可能となり，応答の共分散$\mathbf{R}_{Yk}(x)$を得る．

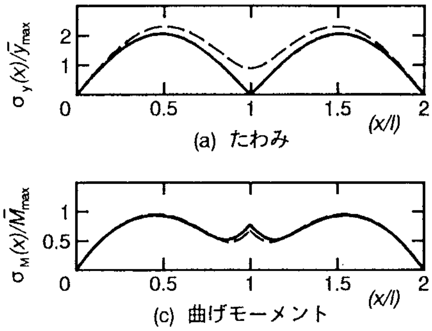

図-3 白色雑音でモデル化した荷重を受ける連続ばりの応答の標準偏差

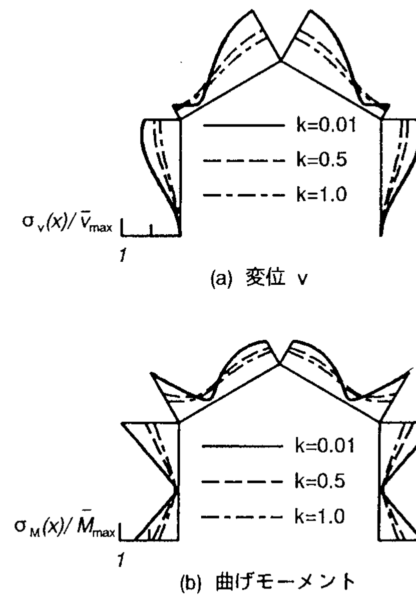

図-4 指数関数型の相関のある荷重を受ける山形ラーメンの応答の標準偏差

5. 数値計算例　本研究の目的は，変動する荷重による構造物の応答の変動特性を得ることにある．計算例として，応答の変動の標準偏差求めた．図-3，4に，白色雑音過程荷重を受ける中間支点が支持およびバネ支持の連続ばり，および，指数関数型の相関を有する荷重を受ける山形ラーメンの解析結果を示す．図-3の破線はバネ支持の場合を示し，図-4のkはスペクトルパラメータを表している．

6. まとめ　本報告では，はり，連続ばり，アーチ，および直列型剛接構造などの2点境界値問題として解析できる構造物に，静的不規則分布荷重が作用する問題の確率論的解析が，確率伝達マトリックス法により統一的に行えることを示した．個々の問題の詳細な計算方法は参考文献を参照されたい．

[参考文献] 1) 岡林他，相関のある不規則分布荷重を受けるはりの解析，土木学会論文報告集，第341号，pp.155-162,1984.　2) 岡林他，不規則分布荷重を受ける連続ばりの分散・共分散解析，土木学会論文集，No.525/I-32，pp.117-126,1995.　3) 河角他，不規則分布荷重を受ける直列型剛接構造系の確率伝達マトリックス法による解析，構造工学論文集，1996, 掲載予定.