剛結骨組構造の非線形座屈解析

熊本大学工学部　学生員　○荒巻　栄輔
同　上　正　員　三池　亮次
同　上　正　員　小林　一郎
熊本大学工学研究科　学生員　橋本　淳也

1　はじめに

軸力以外に曲げモーメントやせん断力の働く剛結骨組構造の幾何剛性マトリックスが、接続マトリックスと平衡マトリックスという2つの骨組の形状のみで決まる形状マトリックスの微分形で与えられることについては、先に発表のとおりである。ここでは、この形状マトリックスを用い求められる骨組構造の有限変形の状態における接線剛性マトリックスの固有値解析に基づく非線形座屈解析の手法を提案する。

2　幾何剛性マトリックス

剛結骨組構造の有限変位解析の基礎式は中間荷重における状態を$\prime$と表すとき、

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{K}\Delta \mathbf{d} + \mathbf{b} \tag{1}$$

ここに

$$\mathbf{K} = (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})^T、\ \mathbf{b} = \Delta\mathbf{C}\mathbf{p}_m{}' - (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{F}_m\mathbf{p}_m{}' - (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})K_m\Delta\mathbf{e}_\theta \tag{2}$$

$\mathbf{K}$は剛性マトリックス、$\Delta\mathbf{d}, \Delta\mathbf{p}$は中間状態からの変位および外力の増分、$(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})$は変形後の接続マトリックスである。$\mathbf{K}_m = \mathbf{F}_m^{-1}$、$\mathbf{F}_m = diag\{\mathbf{F}_{m,I}\}$、$\Delta\mathbf{e}_\theta = \{\Delta\mathbf{e}_{\theta,I}\}$、$\mathbf{p}'_m = \{\mathbf{p}'_{m,I}\}$、添字$I$は第$I$部材における値を$\mathbf{p}'_m$ はI部材の終端における部材端応力ベクトルで、$\mathbf{p}'_m$は$\mathbf{p}'_{m,I}$のブロック列ベクトルである。$\mathbf{F}_{m,I}$は変形後の状態における平衡マトリックス$\mathbf{H}_{\xi j}$と部材剛性EA, EIの逆数を対角要素とする対角マトリックス$\mathbf{F}_e$を用い

$$\mathbf{F}_{m,I} = \int_l \mathbf{H}_{\xi j}^T\mathbf{F}_e\mathbf{H}_{\xi j}d\xi' \qquad \Delta\mathbf{F}_{m,I} = \int_l \mathbf{H}_{\xi j}^T\mathbf{F}_e(\mathbf{H}_{\xi j} - \mathbf{H}'_{\xi j})d\xi' \tag{3}$$

である。$\Delta\mathbf{e}_\theta$は部材の回転を示す、有限変形に関するある補正項である。式(1)の$\Delta\mathbf{p}$の変位増$\Delta\mathbf{d}$に関する変分

$$\delta\Delta\mathbf{p} = (\mathbf{K}_E{}' + \mathbf{K}_G{}')\delta\Delta\mathbf{d} \equiv \mathbf{K}'_T\delta\Delta\mathbf{d} \tag{4}$$

ここに

$$\mathbf{K}'_G = \left\{\left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_0 - \mathbf{C}'\mathbf{K}'_m\left[\frac{\partial\Delta\mathbf{F}_m}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_0\right\}\mathbf{p}'_m \tag{5}$$

は中間状態における幾何剛性マトリックス、$\mathbf{K}'_T$は接線剛性マトリックスである。なお、$[\partial\mathbf{C}/\partial\Delta\mathbf{d}]$は立体マトリックスで、添字0は$\Delta\mathbf{d} = 0$ すなはち中間状態における値を意味する。

3　非線形座屈固有値解析

有限変形が進行して、荷重が座屈荷重に十分に接近したものとする。その時の荷重と変位を$\mathbf{p}^0$と$\mathbf{d}^0$とし、それからの荷重と変位増分が$\Delta\mathbf{p}$と$\Delta\mathbf{d}$すなわち$\mathbf{p}' = \mathbf{p}^0 + \Delta\mathbf{p}$、$\mathbf{d}' = \mathbf{d}^0 + \Delta\mathbf{d}$において座屈点があるものとする。$\Delta\mathbf{d}$が十分に小さいものであれば、座屈点における弾性剛性マトリックスを

$$\begin{aligned}\mathbf{K}'_E &= (\mathbf{C}^0 + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}'_m(\mathbf{C}^0 + \Delta\mathbf{C})^T \\ &\doteqdot \mathbf{C}^{0\prime}\mathbf{K}_m^0\mathbf{C}^{0T}\end{aligned} \tag{6}$$

また、座屈点における$\mathbf{K}'_G$を与える(5)式の$[\partial\mathbf{C}/\partial\Delta\mathbf{d}]_0$、$[\partial\Delta\mathbf{F}_m/\partial\Delta\mathbf{d}]_0$も、座屈点に近接した値$[\partial\mathbf{C}/\partial\Delta\mathbf{d}]_0^0$、$[\partial\mathbf{C}/\partial\Delta\mathbf{d}]_0^0$で近似する。(4)と(5)式は

$$\delta\Delta\mathbf{p}=\left\{\mathbf{K}_E^0+\left(\left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_0^0-\mathbf{C}^0\mathbf{K}_m^0\left[\frac{\partial\Delta\mathbf{F}_m}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_0^0\right)\left(\mathbf{p}_m^0+\Delta\mathbf{p}_m\right)^{(i)}\right\}\delta\Delta\mathbf{d}^{(i)}=\mathbf{K}_T^{(i)}\delta\Delta\mathbf{d}^{(i)} \tag{7}$$

となる。また、有限変形基礎式である(1)式において、$\Delta\mathbf{p}^{(i)}$と$\Delta\mathbf{d}^{(i)}$、$i=1,2,\cdots\cdots$を座屈近接点からの増分と考える。(1)式において

$$\Delta\mathbf{d}^{(i)}\doteqdot\mathbf{K}_T^{(i-1)^{-1}}\Delta\mathbf{p}^{(i)} \tag{8}$$

のように近似すると

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{p}_m^{(i)}&=\mathbf{K}_m\mathbf{C}^T\Delta\mathbf{d}^{(i)}\\&=\mathbf{K}_m^0\mathbf{C}^{0^T}\mathbf{K}_T^{(i-1)^{-1}}\Delta\mathbf{p}^{(i)}\\&=\lambda\mathbf{K}_m^0\mathbf{C}^{0^T}\mathbf{K}_T^{(i-1)^{-1}}\Delta\mathbf{p}_0^{(i)}\\&=\lambda^{(i)}\mathbf{D}^{(i-1)}\Delta\mathbf{p}_0^{(i)}\end{aligned} \tag{9}$$

ここに

$$\mathbf{D}^{(i-1)}=\mathbf{K}_m^0\mathbf{C}^{0^T}\mathbf{K}_T^{(i-1)^{-1}}\qquad\Delta\mathbf{p}^{(i)}=\lambda^{(i)}\Delta\mathbf{p}_0^{(i)} \tag{10}$$

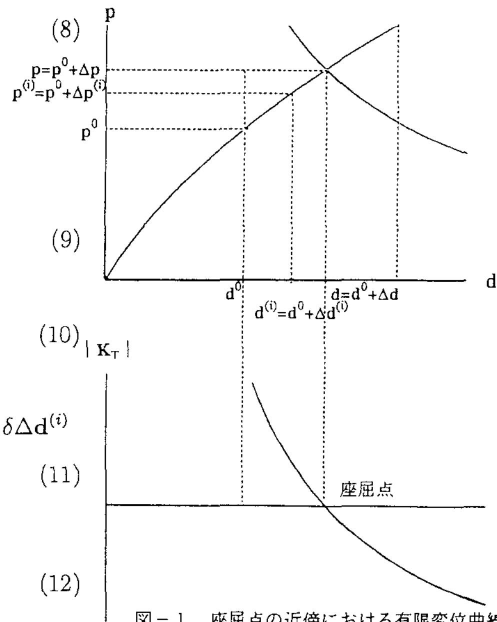
を得る。(9)式を(7)式に代入すれば、次式

$$\begin{aligned}\delta\Delta\mathbf{p}&=\left\{\mathbf{K}_E^0+[\mathbf{K}_G]^0\mathbf{p}_m^0+\lambda^{(i)}[\mathbf{K}_G]^0\mathbf{D}^{(i-1)}\Delta\mathbf{p}_0^{(i)}\right\}\delta\Delta\mathbf{d}^{(i)}\\&=(\overline{\mathbf{K}_E}+\lambda^{(i)}\overline{\mathbf{K}_G^{(i)}})\delta\Delta\mathbf{d}^{(i)}\equiv\mathbf{K}_T^{(i)}\delta\Delta\mathbf{d}^{(i)}\end{aligned} \tag{11}$$

が誘導される。ここに

$$[\mathbf{K}_G]^0=\left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_0^0-\mathbf{C}^0\mathbf{K}_m^0\left[\frac{\partial\Delta\mathbf{F}_m}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_0^0 \tag{12}$$

$$\overline{\mathbf{K}_E}=\mathbf{K}_E^0+[\mathbf{K}_G]^0\,\mathbf{p}_m^0\quad、\quad\overline{\mathbf{K}_G^{(i)}}=[\mathbf{K}_G]^0\mathbf{D}^{(i)}\Delta\mathbf{p}_0^{(i)} \tag{13}$$

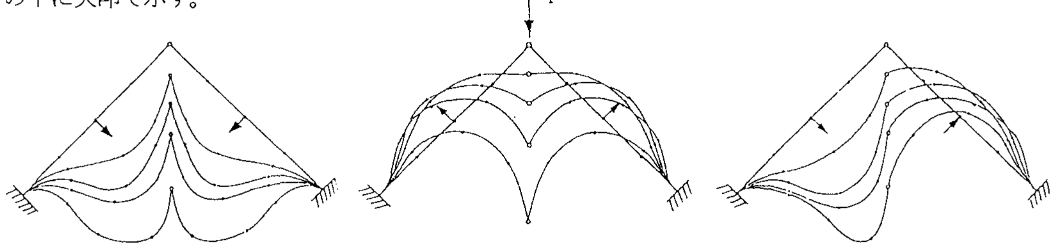


図－１　座屈点の近傍における有限変位曲線とΔK_Tの行列式－変位曲線

(12)式が、固有値による非線形座屈解析の基礎式であり、骨組構造の有限変形の行列式$|\mathbf{K}_T|$が零に接近する段階で$|\mathbf{K}_T|=0$とするような固有値$\lambda^{(i)}$と固有ベクトル$\delta\Delta\mathbf{d}^{(i)}$を求める。$\Delta\mathbf{p}^{(i)}=\lambda^{(i)}\Delta\mathbf{p}_0^{(i)}$において非線形座屈が起こるものとするが、$\Delta\mathbf{p}^{(i)},\Delta\mathbf{d}^{(i)}$が十分小さくないときは精度不十分で上記の計算をくり返す。

4　適用例

非線形座屈解析を行う前に我々は、図－2に示すような2部材剛性トラスの有限変形解析を試みた。また、それぞれのモードについては、初期不整として$l/1000cm$の変位で制御し、その方向を図－2の中に矢印で示す。



図－２　２部材トラスの座屈

参考文献

1) Miike,R,Kobayasi,I,Yamada,Z:"Virtual Large Displacement Theorem for Framed Structures" ASCE,1990

2) 橋本淳也、三池亮次、佐藤啓治、小林一郎、形状マトリックスを用いた幾何剛性マトリックスの一般化、土木学会講演発表会1995年9月