形状マトリックスを用いた曲線部材骨組の幾何剛性マトリックス

熊本大学工学部　学生員　○三樹　祐太
同　上　正　員　三池　亮次
同　上　正　員　小林　一郎
熊本大学工学研究科　学生員　橋本　淳也

１．はじめに

軸力以外は曲げモーメントやせん断力の働く直線部材で構成される骨組構造の幾何剛性マトリックスが接続マトリックスと形状マトリックスという２つの形状マトリックスの微分形で表されることについては、すでに発表のとおりである。この手法を用い、任意の曲線部材で構成される骨組構造の幾何剛性マトリックスを求めることの可能性を探究する。

２．曲線部材の平衡マトリックス

平面骨組構造の第Ⅰの曲線部材が変形の中間状態より、図１に示すように変形するものとする。図において、ϕ_iは基準座標(x, y)に対する部材のi端における傾角、θ_iはi端における部材要素の廻転角、ψは基準座標に対する部材角、$\Delta\psi$は部材廻転角、$\tilde{\phi}_i$は移動部材座標系$(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$に対するi端の部材角で添字プライムで中間状態における値を与えるものとする。容易に、次式

$$\tilde{\phi}_i = \theta_i + \phi_i' - (\psi' + \Delta\psi)$$
$$= \theta_i + \tilde{\phi}_i' - \Delta\psi \qquad (1)$$

を得る。中間状態において、部材始端i'から部材軸に沿ってξ'の距離の部材断面力ベクトルを$\mathbf{p}'_{m\xi}$とすると、$(P'j')$部材に関する部材端断面力に関するつり合い式は、部材平衡マトリックス$\mathbf{H}'_{\xi j}$を用い

$$\mathbf{p}'_{m\xi} + \mathbf{H}'_{\xi j}\mathbf{p}'_{mj} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

なお$(P'j')$部材の始端としての部材断面力は$-\mathbf{p}'_{m\xi}$である。同様に変形後においてつり合い式は

$$\mathbf{p}_{m\xi} + \mathbf{H}_{\xi j}\mathbf{p}_{mj} = \mathbf{0} \qquad (3)$$

移動座標系である$(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$座標軸方向の成分をもつ部材断面力ベクトル$\mathbf{p}_{\tilde{m}\xi}$と$\mathbf{p}_{\tilde{m}j}$の間には、平衡マトリックス

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\xi j} = \begin{bmatrix} -1 & & \mathbf{0} \\ 0 & -1 & \\ -\tilde{\eta} & \tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j & -1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

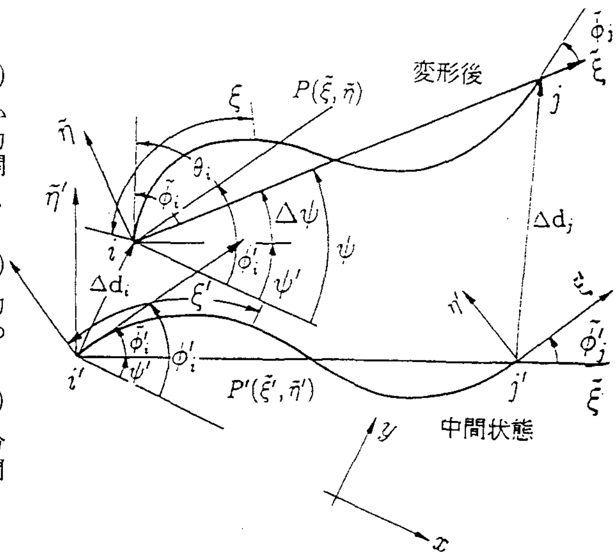

図１、骨組構造の第Ⅰ曲線部材の変形

と、Pおよびj端における部材軸とそれに直交する座標軸からなる(ξ, η)座標軸の$(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$座標系に対する変換マトリックス$\tilde{\mathbf{L}}_\xi$、$\tilde{\mathbf{L}}_j$を用い

$$\mathbf{H}_{\xi j} = \tilde{\mathbf{L}}_\xi^T \tilde{\mathbf{H}}_{\xi j} \tilde{\mathbf{L}}_j \qquad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_\xi = \begin{bmatrix} 1 & -\sin\tilde{\phi} & 0 \\ \sin\tilde{\phi} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{L}}_j = \begin{bmatrix} 1 & -\sin\tilde{\phi}_j & 0 \\ \sin\tilde{\phi}_j & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

(5)式に、(4)式および(6)式を代入すると、変形後の状態における平衡マトリックス

$$\mathbf{H}_{\xi j} = \begin{bmatrix} -1 - \sin\tilde{\phi}\sin\tilde{\phi}_j & \sin\tilde{\phi}_j - \sin\tilde{\phi} & 0 \\ \sin\tilde{\phi} - \sin\tilde{\phi}_j & -1 - \sin\tilde{\phi}\sin\tilde{\phi}_j & 0 \\ -\tilde{\eta} + \sin\tilde{\phi}_j(\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j) & (\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j) + \tilde{\eta}\sin\tilde{\phi}_j & -1 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

3．幾何剛性マトリックス

骨組構造の有限変位解析の基礎式は

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{d} + \mathbf{b} \tag{8}$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})^T, \mathbf{b} = \Delta\mathbf{C}\mathbf{p}'_m - (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{F}_m\mathbf{p}'_m - (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{e}_\theta \tag{9}$$

$\mathbf{K}$ は剛性マトリックス、$\Delta\mathbf{d},\Delta\mathbf{p}$ は中間状態からの変位および外力の増分、$\mathbf{C} = \mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C}$ は変形後の接続マトリックス、$\mathbf{b}$ は有限変形補正項で、$\mathbf{K}_m = \mathbf{F}_m^{-1}$、$\mathbf{F}_m = diag\{\mathbf{F}_{m,I}\}$, $\mathbf{p}'_m = \{\mathbf{p}'_{m,I}\}$, $\Delta\mathbf{e}_\theta = \{\Delta\mathbf{e}_{m\theta,I}\}$, $\mathbf{p}_{m,I}$はＩ部材の終端における部材端応力

$$\mathbf{F}_{m,I} = \int_l (\mathbf{H}_{\xi j}^T\mathbf{F}_e\mathbf{H}_{\xi j})_0 d\xi', \quad \Delta\mathbf{F}_{m,I} = \int_l (\mathbf{H}_{\xi j}^T\mathbf{F}_e\Delta\mathbf{H}_{\xi j})d\xi', \quad \Delta\mathbf{H}_{\xi j} = \mathbf{H}_{\xi j} - \mathbf{H}'_{\xi j} \tag{10}$$

$$\Delta\mathbf{e}_{m\theta,I} = -\int_l \mathbf{H}_{\xi j}^T\Delta\mathbf{e}_{m\theta,\xi}d\xi', \quad \mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & \mathbf{0} \\ & 0 & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \tag{11}$$

上式で、$\Delta\mathbf{e}_{m\theta,I}^T = [1-\cos\Delta\theta_\xi \quad 0 \quad 0]$ で部材長１の全長にわたり積分する。(8) 式において、$\Delta\mathbf{d} = \mathbf{0}$ における、すなわち中間状態における$\Delta\mathbf{p}$ の変分$\delta\Delta\mathbf{p}$ は

$$\delta\Delta\mathbf{p} = \{\mathbf{K}'_E + \mathbf{K}'_G\}\delta\Delta\mathbf{d} \equiv \mathbf{K}'_T\delta\Delta\mathbf{d} \tag{12}$$

ここに、$\mathbf{K}'_E = \mathbf{C}'\mathbf{K}_m\mathbf{C}'^T$ は弾性剛性マトリックス、$\mathbf{K}'_T$ は接線剛性マトリックス、幾何剛性マトリックス $\mathbf{K}'_G$は

$$\mathbf{K}'_G = \left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_0 \mathbf{p}'_m - \mathbf{C}'\mathbf{K}'_m\left[\frac{\partial\Delta\mathbf{F}_m}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_0 \mathbf{p}'_m \tag{13}$$

のようになる。添字０は$\Delta\mathbf{d} = \mathbf{0}$ における値、$[\partial\mathbf{C}/\partial\Delta\mathbf{d}]$ は立体マトリックスで

$$\left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]\mathbf{p}'_m = \left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta d_1}\mathbf{p}'_m \quad \frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta d_2}\mathbf{p}'_m \quad \cdots\right] \tag{14}$$

である。剛結骨組構造のように軸力以外に曲げモーメントとせん断力が作用する場合には接続マトリックス、平衡マトリックスを含む$\mathbf{F}_m$の微分形、幾何剛性マトリックス $\mathbf{K}'_G$ に関与する。この (12) 式の右辺第２項のブロック要素 $(\partial\Delta\mathbf{F}_m/\partial\Delta d_i)_0 = (\dot{\mathbf{F}}_m)_0$ を求めるために変形後の部材の任意Ｐの座標 $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$ と傾角$\tilde{\phi}$を次式のように近似する。すなわち

$$\tilde{\xi} = a_1\xi \qquad \tilde{\eta} = b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 \qquad \tan\tilde{\phi} = c_1 + c_2\xi + c_3\xi^2 \tag{15}$$

ここに

$$\left.\begin{array}{llllll} a_1 = \frac{\tilde{\xi}_j}{l} & b_1 & = & \frac{\tilde{\xi}_j}{l}\tan\tilde{\phi}_i & c_1 & = \tan\tilde{\phi}_i \\ & b_2 & = & -\frac{\tilde{\xi}_j}{l^2}(2\tan\tilde{\phi}_i + \tan\tilde{\phi}_j) & c_2 & = -\frac{2}{l}(2\tan\tilde{\phi}_i + \tan\tilde{\phi}_j) \\ & b_3 & = & \frac{\tilde{\xi}_j}{l^3}(\tan\tilde{\phi}_i + \tan\tilde{\phi}_j) & c_3 & = \frac{3}{l^2}(\tan\tilde{\phi}_i + \tan\tilde{\phi}_j) \end{array}\right\} \tag{16}$$

上式の$\tilde{\xi}_j$、$\tan\tilde{\phi}_i$、$\tan\tilde{\phi}_j$はｉ、ｊ端のｘ、ｙ軸方向節点変位 u_k、v_k、$(k = i,j)$ と廻転角ϕ_k、$(k = i,j)$ の関数である。また、式 (13) の

$$\left(\frac{\partial\Delta\mathbf{F}_{m,I}}{\partial\Delta d_i}\right)_0 = \left\{\int_l \mathbf{H}_{\xi j}^T\mathbf{F}_e\frac{\partial\mathbf{H}_{\xi j}}{\partial\Delta d_i}d\xi'\right\}_0 \tag{17}$$

である。したがって式 (7)、(15)、(16) を式 (17) に用い $(\frac{\partial\Delta\mathbf{F}_m}{\partial\Delta\mathbf{d}_i})_0$ を求め、式 (13) より幾何剛性マトリックスが得られる。

参考文献

1) Miike,R,Kobayasi,I,Yamada,Z:"Virtual Large Displacement Theorem for Framed Structures" ASCE,1990
2) 橋本淳也、三池亮次、佐藤啓治、小林一郎、形状マトリックスを用いた幾何剛性マトリックスの一般化、土木学会講演発表会　1995 年 9 月