

底の効果を取り入れた準二次元流の数値計算

九州大学 総理工 学生員 ○池畑 義人

本地 弘之

正 員 松永 信博

正 員 杉原 裕司

1. はじめに

鉛直スケールに比べて水平スケールが非常に大きい「平面流」の構造安定性に底の効果がどのように影響するかという問題は、現実の気や海洋の大規模な流れの安定性を考える上で興味深い問題である。本研究では、薄い電解液中において電磁駆動される流れを対象として、底の効果が流れの構造安定性に及ぼす影響を数値的、実験的に調べた。数値計算の結果は、実験結果とよく一致し、その妥当性が検証された。

2. 理論

外力が作用する流れ場の基礎方程式は以下のように表わせる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{F}(x, y, z) \quad (1)$$

ここで $\mathbf{u}=(u, v, w)$ は速度ベクトル、 ρ は密度、 p は圧力、 ν は動粘性係数で $\mathbf{F}$ は外力である。また、 u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の流速成分であり、 x, y は、水平面座標、 z は鉛直座標を示す。今「平面流」($u, v \gg w$) を対象とし、 $w \approx 0$ と考えよう。この場合 $\mathbf{u}$ は、水表面の流速を $\mathbf{u}_s(x, y)$ として、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s(x, y) A(z)$ で表わせるものとする。 $A(z)$ を二次までテイラー展開して、底面で $\mathbf{u} = 0$ 、水表面で $\mathbf{u}/\mathbf{z} = 0$ という条件を用いると $A(z) = 2z/h - (z/h)^2$ が導かれる。式(1)に $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s(x, y) A(z)$ を代入して $z = h$ の場合を考えると水表面の流体の運動を記述する式が以下のように求められる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla_h) \mathbf{u}_s = \nu \nabla_h^2 \mathbf{u}_s - \frac{2\nu}{h^2} \mathbf{u}_s + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}(x, y) \quad (2)$$

ここで、 $\nabla_h = (\partial/\partial x) + (\partial/\partial y)$ で、 $\mathbf{f}$ は水表面での外力、 i, j はそれぞれ x, y 方向の単位ベクトルである。式(2)中の $-2\nu/h^2 \mathbf{u}_s$ は、式(1)を二次元化したときに生じる底面摩擦の項でレイリー抵抗と呼ばれる。

3. 実験および数値計算

実験の作業流体には3.0%の NaHCO_3 水溶液を用いた。図1の様に水槽の底の背後に $3.7 \times 2.4 \text{ cm}$ の磁石を5つ並べ、磁性が互い違いになるように磁場を生じさせた。流体層の厚さは 0.8 cm であった。水槽両端には電極を置いて作業流体に定電流を流し、磁場と電流の相互作用によって生じるローレンツ力で流体を駆動した。作業流体の ν は $0.01066 \text{ cm}^2/\text{s}$ で、電気伝導率は $\sigma = 20.8 \text{ mmho/cm}$ であった。数値計算の場合においても式(2)の外力としてローレンツ力 $\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ を考える。ここで $\mathbf{J}$ は電流密度ベクトル、 $\mathbf{B}$ は磁束密度ベクトルである。実験の状況から、 $\mathbf{J} = J_0 \mathbf{i}$ 、 $\mathbf{B} = B_0 \exp\{-4\pi(y-H/2)/L\} \sin(4\pi x/L) \mathbf{k}$ とおく。ここで J_0 は印加した定電流の値、 B_0 は磁石中心での磁束密度の最大値、 H は磁石の y 軸方向の長さ、 $\mathbf{k}$ は z 軸方向の単位ベクトルである。ローレンツ力を式(2)へ代入し、 rot を取って、代表長さスケール L と代表速度スケール $U (\equiv \sqrt{J_0 B_0 L / \rho})$ で無次元化すると無次元渦度方程式として次式が得られる。

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t'} + \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \frac{\partial \omega'}{\partial x'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \frac{\partial \omega'}{\partial y'} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla'^2 \omega' - \frac{1}{\text{Rh}} \omega' - 4\pi \exp\{-4\pi(y'-b)\} \cos(4\pi x') \quad (3)$$

ここで、プライムは無次元量を表し、 ω' は渦度、 ψ' は流れ関数である。 Re 、 Rh および b はそれぞれ UL/ν 、 $U h^2 / (2\nu L)$ 、 $H/2L$ で定義した無次元パラメータである。式(3)の非線型発展方程式を差分近似し、数値積分を行なった。計算領域は $[x', y'] \in [0, 1.25] \times [0, 1]$ であり、 125×100 に分割された。境界条件は図2に示されている。

4. 結果および考察

写真1、2は、それぞれ $\text{Re} = 527$ 、 $\text{Rh} = 0.998$ および $\text{Re} = 1990$ 、 $\text{Rh} = 3.77$ の場合における実験の流れ模様を示す。ここで τ は、 $1/\sqrt{J_0 B_0 L}$ で定義された無次元時間であり、 t は実験開始からの時間を示している。 Re 、 Rh が比較的小さい場合には、ほぼ同じ大きさのセルが形成される。しかし、これらのパラメータが大きくなると写真2のように真ん中の2つのセルが押し縮められ、その両側のセルが大きく張り出すパターンに構造変化する。このような流れ構造は離岸流の室内実験においても観察されている²⁾。図3(a)、(b)は、数値計算によって得られた流れ関数 ψ' の等値線図であり、それぞれ $\text{Re} = 200$ 、 $\text{Rh} = 0.4$ および $\text{Re} = 800$ 、 $\text{Rh} = 1.6$ の結果である。図中の実線は、反時計回り、点線は時計回りの流れを示す。数値計算においてもパラメータの増加に伴う流れの構造変化がシュミレー

トされており、このことは本解析の数値モデルが妥当であることを示している。数値計算と実験において、同一の流れのパターンを示すパラメータの範囲は異なっているが、これは実際の流れでは鉛直方向の流速分布が2次関数からずれているためであると考えられる。図4は、式(3)中のレイリー抵抗を除去した場合の数値計算結果を示す。レイリー抵抗がない場合、セル構造が崩れて、図3(b)で見られるようなパターンは形成されない。このことは、流れの構造安定性に底の効果が重要な影響を及ぼすことを示唆している。

参考文献

- (1)村上 洋一：準二次元流の安定性；なかれ 13 (1994) 115-123
- (2)松永 信博：沿岸域における循環流と環境問題；1990年度（第26回）水工学に関する夏期研修会講義集Bコース 90-B-2

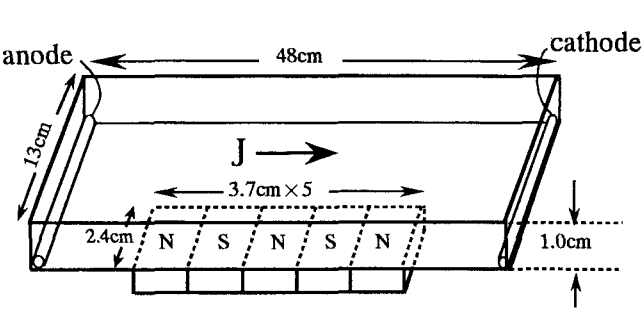


図1 実験装置図

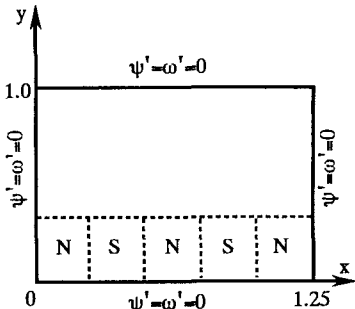


図2 計算領域と境界条件

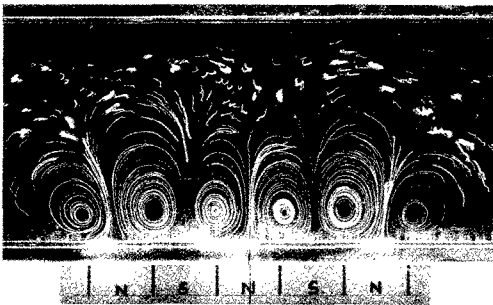


写真1 Re=527, Rh=0.998, tau=46

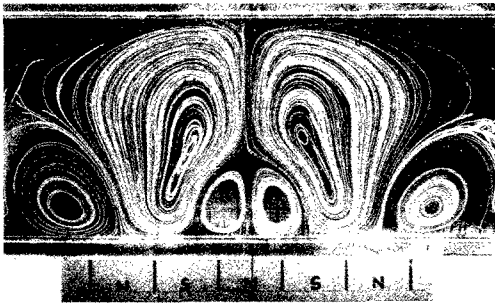
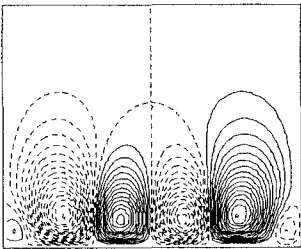
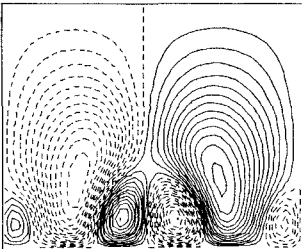


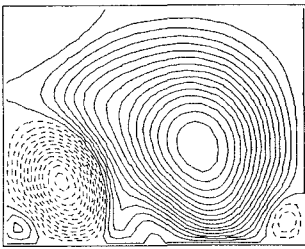
写真2 Re=1990, Rh=3.77, tau=15



(a) Re=200, Rh=0.4, tau=8



(b) Re=800, Rh=1.6, tau=8



Re=800, tau=8

図3 レイリー抵抗を考慮したときの数値計算結果

図4 レイリー抵抗を考慮しないときの数値計算結果