

強制外力を受けるケーブルの非線形振動解析

長崎大学工学部 学生員 ○花田博史 長崎大学工学部 正 員 高橋和雄
 長崎大学工学部 学生員 鎌田智之 長崎大学工学部 学生員 山口健市

1. まえがき 著者らは、斜張橋などの支持ケーブルの支点が塔もしくは桁の振動によって変動軸力を受ける場合の線形応答を報告した¹⁾。しかし、ケーブルは非線形項が強い構造部材であるため応答を求めるためには、非線形振動論による解析が必要である。変動軸力を受ける場合の非線形運動方程式には係数励振の項が含まれるために調和バランス法による解析は無理である。そこで、本研究では平均法による解析²⁾を新たに採用し、周期外力と変動軸力を受ける偏平ケーブルの非線形応答を明らかにする。

2. 解法 周期外力と変動軸力を受ける偏平ケーブル(サグ比 1/8 以下)の運動方程式は次のように与えられる。

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{8f}{l^2} h - (H_e + H_t \cos v \Omega t + h) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p \cos(\Omega t + \varphi) = 0 \quad (1)$$

ここに、 $h = \frac{EA}{L_E} \left\{ \frac{8f}{l^2} \int_0^l w dx + \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\}$: たわみによる付加張力, m : ケーブルの質量, f : ケーブルのサグ,

l : スパン長, H_e : 初期水平張力, H_t : 変動張力の振幅, p : 荷重強度, w : たわみ, t : 時間, v : 定数, Ω : 外力の円振動数, φ : 位相角, E : ヤング率, A : 断面積, L_E : ケーブル長

式(1)の解を次のように 1 自由度系に仮定する。

$$w = lT(t)W(x) \quad (2) \quad \text{ここに、} T: \text{時間関数, } W: \text{固有振動形}$$

式(2)を式(1)に代入して、Galerkin 法を適用すれば時間に関する運動方程式が得られる。これに粘性減衰力を考慮すると

$$\ddot{T} + 2h\omega_1 \dot{T} + (\omega_1^2 + \alpha \cos v \bar{\omega} \tau) T + C_2 T^2 + C_3 T^3 = \bar{p}_0 \cos(\bar{\omega} \tau + \varphi) \quad (3)$$

ここに、 ω_1 : 1 次振動の無次元固有円振動数, h : 減衰定数, $\alpha = H_t / H_e$: 無次元変動張力の振幅, $\bar{\omega} = \Omega / n_0$: 無次元励振振動数, $\tau = n_0 t$: 無次元時間, C_2, C_3 : 非線形項の係数。なお、 ω_1, C_2, C_3 はケーブルのサグ比 $\gamma = f / l$, および縦波-横波伝播速度比 $k = \sqrt{EA / H_e}$ および $\bar{W}$ より定まる。

式(3)の近似解を得るために、平均法を用いる。まず近似解を次式で仮定する。

$$T = C_0 + C_{1/2} \cos\left(\frac{\bar{\omega} \tau}{2}\right) + S_{1/2} \sin\left(\frac{\bar{\omega} \tau}{2}\right) + C_1 \cos(\bar{\omega} \tau) + S_1 \sin(\bar{\omega} \tau) \quad (4)$$

ここに、 C_0, C_1, S_1 : 付随調波成分、 $C_{1/2}, S_{1/2}$: 分岐調波成分

式(4)を式(3)に代入して平均法を適用すると、次の 5 つの平均化方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \omega_1 h \frac{dC_0}{d\tau} &= -\frac{1}{2} \omega_1^2 C_0 - \frac{\alpha}{4} C_1 - \frac{1}{2} C_2 (C_0^2 + \frac{1}{2} C_{1/2}^2 + \frac{1}{2} S_{1/2}^2 + \frac{1}{2} C_1^2 + \frac{1}{2} S_1^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} C_3 (C_0^3 + \frac{3}{2} C_0 C_{1/2}^2 + \frac{3}{2} C_0 S_{1/2}^2 + \frac{3}{2} C_0 C_1^2 + \frac{3}{2} C_0 S_1^2 + \frac{3}{4} C_{1/2}^2 C_1 - \frac{3}{4} S_{1/2}^2 C_1 + \frac{3}{2} C_{1/2} S_{1/2} S_1) \\ \bar{\omega} \frac{dC_{1/2}}{d\tau} &= -\frac{\bar{\omega}^2}{4} S_{1/2} + \omega_1^2 S_{1/2} - \frac{1}{2} \alpha S_{1/2} - h \omega_1 \bar{\omega} C_{1/2} + C_2 (2C_0 S_{1/2} + C_{1/2} S_1 - S_{1/2} C_1) \\ &\quad - C_3 (3C_0^2 S_{1/2} + 3C_0 C_{1/2} S_1 - 3C_0 S_{1/2} C_1 + \frac{3}{4} C_{1/2}^2 S_{1/2} + \frac{3}{4} S_{1/2}^3 + \frac{3}{2} S_{1/2} C_1^2 + \frac{3}{2} S_{1/2} S_1^2) \\ \bar{\omega} \frac{dS_{1/2}}{d\tau} &= \frac{\bar{\omega}^2}{4} C_{1/2} - \omega_1^2 C_{1/2} - \frac{1}{2} \alpha C_{1/2} - h \omega_1 \bar{\omega} S_{1/2} - C_2 (2C_0 C_{1/2} + C_{1/2} C_1 + S_{1/2} S_1) \\ &\quad - C_3 (3C_0^2 C_{1/2} + 3C_0 C_{1/2} C_1 + 3C_0 S_{1/2} S_1 + \frac{3}{4} C_{1/2}^3 + \frac{3}{4} C_{1/2} S_{1/2}^2 + \frac{3}{2} C_{1/2} C_1^2 + \frac{3}{2} C_{1/2} S_1^2) \end{aligned}$$

$$2\bar{\omega} \frac{dC_1}{d\tau} = \bar{p}_0 \sin \varphi - \bar{\omega}^2 S_1 + \omega_1^2 S_1 - 2h\omega_1 \bar{\omega} C_1 + C_2(2C_0 S_1 + C_{1/2} S_{1/2}) \quad (5)$$

$$+ C_3(3C_0^2 S_1 + 3C_0 C_{1/2} S_{1/2} + \frac{3}{2} C_{1/2}^2 S_1 + \frac{3}{2} S_{1/2}^2 S_1 + \frac{3}{4} C_1^2 S_1 + \frac{3}{4} S_1^3)$$

$$2\bar{\omega} \frac{dS_1}{d\tau} = \bar{p}_0 \cos \varphi + \bar{\omega}^2 C_1 - \omega_1^2 C_1 - \alpha C_0 - 2h\omega_1 \bar{\omega} S_1 - C_2(2C_0 C_1 + \frac{1}{2} C_{1/2}^2 - \frac{1}{2} S_{1/2}^2) \\ - C_3(3C_0^2 C_1 + \frac{3}{2} C_0 C_{1/2}^2 - \frac{3}{2} C_0 S_{1/2}^2 + \frac{3}{2} C_{1/2}^2 C_1 + \frac{3}{2} S_{1/2}^2 C_1 + \frac{3}{4} C_1 S_1^2 + \frac{3}{4} C_1^3)$$

平均法では、 $C_0, C_{1/2}, S_{1/2}, C_1, S_1$ を時間の関数と考えるから、定常解は、上式で

$$\frac{dC_0}{d\tau} = \frac{dC_{1/2}}{d\tau} = \frac{dS_{1/2}}{d\tau} = \frac{dC_1}{d\tau} = \frac{dS_1}{d\tau} = 0$$

と置くことによって求められる。この5つの方程式に Newton-Raphson 法を適用すれば、振幅成分が得られる。式(4)を2元連立の1階常微分方程式に変換し、Runge-Kutta-Gill 法を用いて時間応答が得られる。

3. 解析結果 式(3)の特性を調べるために文献 3)と同じパラメータで解析する。図-1,2 は、 $h=0.01, \omega_1=1.0, \bar{p}_0=1.0, \varphi=0, C_2=0, C_3=1.0$ とした場合の応答曲線を示す。図-1 は励振力 $\bar{p}_0$ を0とし、図-2 は励振力の振幅 $\alpha=1.0$ 、周期外力と励振力の振動数を同じにしている($\nu=1$)。図において横軸は無次元加振振動数、縦軸は振幅成分である。

図-1,2において、 C_1 は主調波応答を示し、 C_1 は外力と同位相、 $-C_1$ は外力と逆位相の応答を示す。 $1/2$ 分数調波共振の応答 $C_{1/2}, S_{1/2}$ は、2次の非線形項 $C_2=0$ の場合には現れなかった。しかし、図-2では $C_2=0$ であるが、係数励振力の影響で $1/2$ 分数調波共振が現れる。また、 $1/2$ 分数調波は固有振動数の2倍の振動数領域で生じ、応答は3次の非線形項の支配を受けて硬化バネの特性を示す。文献 3)と比較すると、全く同じ結果が得られている。さらに、図-2では Runge-Kutta-Gill 法で得られた応答振幅をプロットしている。両者は、ほぼ一致する。

図-3は、 $C_2=1.0, h=0.05, \alpha=1.0$ の場合で荷重強度 $\bar{p}_0$ を1、 $1/2$ 、0と変化させた結果である。荷重が小さくなるほど主調波共振は小さくなるが、 $1/2$ 分数調波の振幅応答は変化しない。

4. まとめ ケーブルについての考察は、当日発表する。

参考文献 1)高橋・鎌田・町田・松野：土木学会論文集, No.495/I-28, pp.127-130, 1994.7

2)Nayfeh, A.H. and Mook, D.T.: Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, 1979

3)津田・田村・末岡：日本機械学会講演論文集, (Vol.A), pp.52-56, 1993.7

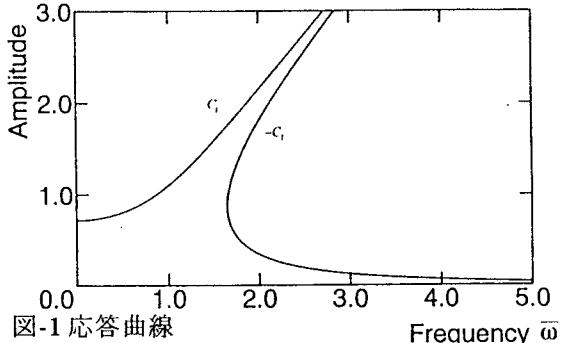


図-1 応答曲線 ($h=0.01, \omega_1=1.0, \bar{p}_0=1.0, \alpha=0, C_2=0, C_3=1.0$)

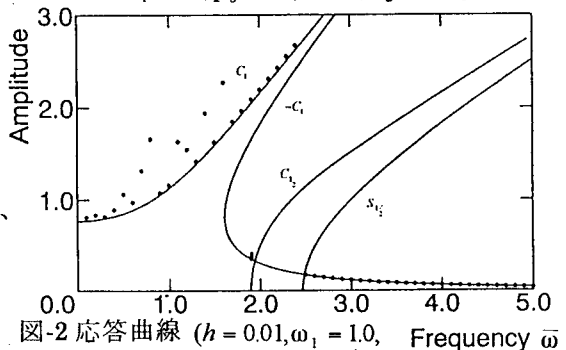


図-2 応答曲線 ($h=0.01, \omega_1=1.0, \bar{p}_0=1.0, \alpha=1.0, \nu=1.0, C_2=0, C_3=1.0$)

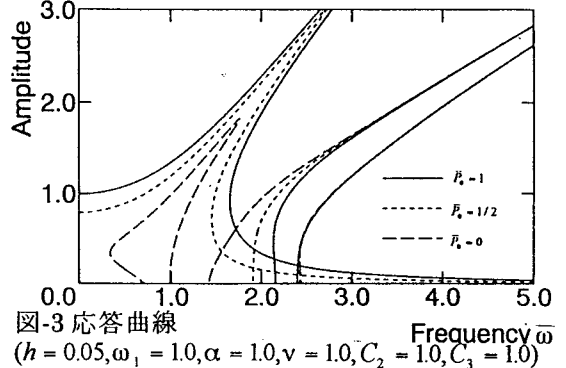


図-3 応答曲線 ($h=0.05, \omega_1=1.0, \alpha=1.0, \nu=1.0, C_2=1.0, C_3=1.0$)