

境界部で弾性支持された変断面長方形板の動的安定性

長崎大学大学院 学生員 ○古谷寿章

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

1. まえがき はりや平板の構造物の動的安定の研究はこれまで数多く行われ、解法および現象も明確になってきている¹⁾。本研究は、Kar²⁾によって提案された先端で弾性支持された熱勾配をもつ変断面片持ちばりの動的安定を、自由辺で弾性支持された変断面片持ち長方形板の動的安定に拡張するものである。この場合の平板は自由辺を含むために、力学的境界条件を満足する座標関数を求めることは困難なため、幾何学的境界条件のみを満足する関数を用いて解析できる、Ritz法を解法に採用する。Ritz法で求めた自由振動の固有振動形を用い、全ポテンシャルエネルギーにHamiltonの原理を適用した離散化を行う。得られた運動方程式を行列表示した後に、固有値問題に変換する方法を用いて不安定領域を求める。

数値解析において、境界部で弾性支持された変断面長方形板の動的安定性をバネ定数および変断面パラメータのもと明らかにする。

2. 運動方程式および解法 図-1に示すような、自由辺($x=a$)で鉛直方向と回転に対して弾性支持された変断面長方形板が、 x 方向の一様分布の静的面内力と変動面内力を受ける場合を考える。自由辺で弾性支持された変断面長方形板のひずみエネルギー V 、変断面長方形板の運動エネルギー T および面内力による仕事 U は、以下のように与えられる。

$$V(w) = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a D \left[(\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w \partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy + \frac{K_v}{2} \int_0^b w(a, y)^2 dy + \frac{K_r}{2} \int_0^b \left(\frac{\partial w(a, y)}{\partial x} \right)^2 dy \quad (1)$$

$$T(w) = \frac{\rho}{2} \int_0^b \int_0^a h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (2)$$

$$U(w) = -\frac{N_x}{2} \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (3)$$

ここに、 w : たわみ、 $D(x) = Eh(x)^3 / 12(1-\nu^2)$: 板剛度、

E : ヤング率、 $h(x)$: 板厚、 ν : ポアソン比、

$\nabla^2 = (\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)$ 、 K_v : 鉛直バネ定数、 K_r : 回転

バネ定数、 x, y : 平板中央面の座標系、 ρ : 板の密度、

$N_x = N_{x0} + N_{xt} \cos \Omega t$: 面内力、 N_{x0} : 静的面内力、

N_{xt} : 変動面内力の振幅、 Ω : 変動面内力の円振動数、

t : 時間。

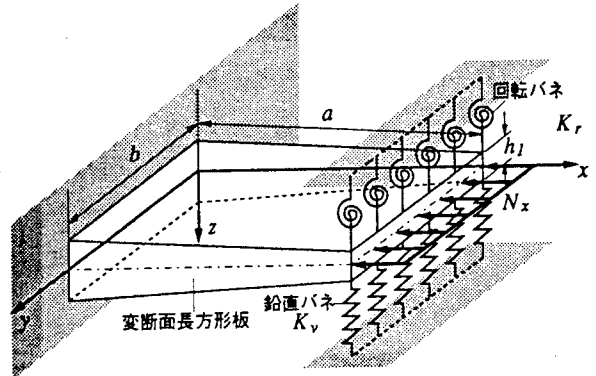


図-1 一般図

本研究では、長方形板の板厚は x 方向に線形的に変化するものとし、 $x=a$ での板剛度 D_1 、板厚 h_1 を用いると、断面内の x 点における諸値は次のように設定される。

$$h(x) = h_1 \{ 1 + \beta^* (1 - x/a) \} = h_1 G(x), \quad D(x) = D_1 \{ 1 + \beta^* (1 - x/a) \}^3 = D_1 G(x)^3 \quad (4)$$

ここに、 β^* : 変断面パラメータ、 $G(x)$: x の関数。

動的安定性解析を行うに当たり、たわみ w を次のように仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (5)$$

ここに、 T_{mn} : 未知の時間関数、 W_{mn} : 自由振動の固有振動形。

一般座標に関する運動方程式を誘導するためにHamiltonの原理を適用し、さらに x, y 座標、時間 t および外力 N_x を無次元化する。得られた式をまとめると、以下のようになる。

$$\sum_{m=1}^n \sum_{n=1}^n \left[C_{mn}^{kl} \ddot{T}_{mn} + \left\{ \frac{1}{k_{11}^4} A_{mn}^{kl} - \frac{\lambda_b \pi^2}{k_{11}^4} (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{xt} \cos \bar{\omega} \tau) B_{mn}^{kl} \right\} T_{mn} \right] = 0 \quad (6)$$

ここに、 $k_{11}^2 = \sqrt{\rho h b^4 \omega_{11}^2 / D_1}$: 自由辺で弾性支持された一様断面長方形板の固有振動数、 $\lambda_b = N_{cr} b^2 / D_1 \pi^2$: 自由辺で弾性支持された一様断面長方形板の座屈固有値、 $\bar{N}_{x0} = N_{x0} / N_{cr}$: 無次元静的面内力、 $\bar{N}_{xt} = N_{xt} / N_{cr}$: 無次元変動面内力の振幅、 N_{cr} : 座屈荷重、 $\tau = \omega_{11} t$: 無次元時間。上式にはさらに次のような無次元パラメータが含まれている。 $\beta = a/b$: 縦横比、 $\kappa_v = K_v b^3 / D_1$: 無次元鉛直バネ定数、 $\kappa_r = K_r b / D_1$: 無次元回転バネ定数。

式(6)を次のように行列表示すると、次式になる。

$$[I] \{\ddot{T}\} + [F] \{T\} + (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{xt} \cos \bar{\omega} \tau) [G] \{T\} = \{0\} \quad (7)$$

ここに、 $[F] = [C]^{-1} [A]$ 、 $[G] = [C]^{-1} [B]$

式(7)の行列 $[G]$ の要素構成より、 $y = b/2$ に対し対称振動と逆対称振動の2つのグループに分けられる。

ついで、一般解をフーリエ級数を使って仮定し、安定判別は文献2)の方法を用いて行う。

3. 動的不安定領域 図-2に、自由辺($x=a$)で

弾性支持された一様断面正方形板($\beta=1.0, \beta^*=0.0, \kappa_v=10000000, \kappa_r=0.0$)の動的不安定領域を示す。図の縦軸 $\bar{N}_{xt}$ は無次元変動面内力の振幅で、横軸 $\bar{\omega}$ は静的面内力 $\bar{N}_{x0}=0.0$ の時の1次の固有円振動数で無次元化した無次元励振振動数である。図中の不安定領域は、 $\bar{N}_{xt}=0.5$ の時の励振振動数 $\bar{\omega}$ の幅が0.1以上のものをプロットしている。不安定領域には単純共振の主不安定領域($2\omega_{ij}/k; k=1$)と結合共振の主不安定領域($\{(\omega_{ij} + \omega_{mn})/k; k=1\}$)があり、両者の副不安定領域は不安定領域幅が狭いためプロットしていない。

い。本論文では右上がりの斜線部が単純共振による不安定領域を表し、右下がりの斜線部が結合共振による不安定領域を表す。

図-3は自由辺($x=a$)で弾性支持された正方形板($\beta=1.0, \kappa_v=10000000, \kappa_r=0.0$)の断面変化による不安定領域の変動を示す。図の縦軸 $\bar{\omega}$ は無次元励振振動数で、横軸 β^* は変断面パラメータである。変断面パラメータ β^* が増加するに従い、正方形板の板厚が増し、剛性が高くなるので不安定領域は狭くなる。また、正方形板の剛性が增大するため、固有振動数も増加するので、不安定領域が発生する振動数領域も高くなる。

4. まとめ 各パラメータの不安定領域に及ぼす影響については、講演時に発表する。

参考文献

- 1) Takahashi, K.: Journal of Sound and Vibration, Vol.85, pp.257~262, 1982.
- 2) Kar, R.C. and Sujata, T.: Journal of Sound and Vibration, Vol.122(2), pp.209~215, 1988.

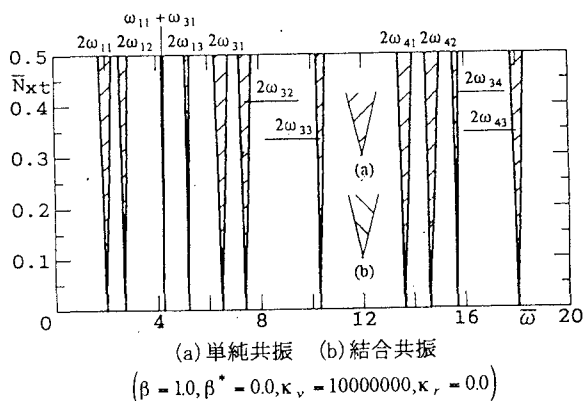


図-2 不安定領域

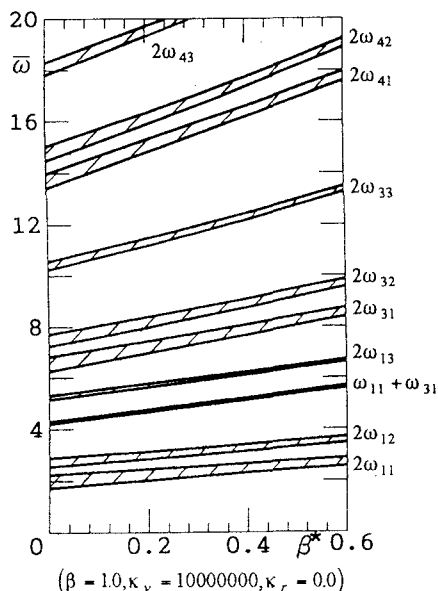


図-3 不安定領域変動図