

非対称積層長方形板の動的安定特性

長崎大学工学部 学生員 ○ 佐藤栄司

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

長崎大学工学部 学生員 前田悟雄

1. まえがき 設計できる材料といわれる積層板は、異なる物理的特性を持つ材料を組み合わせることや、配向角を変化させることにより新しい優れた特性を持つ材料が得られる。このため近年、積層板に関する研究は盛んに行われてきたが、動的安定特性を取り扱った研究はあまり見受けられない。著者等はこれまでの研究で対称積層した長方形板の動的安定性の解法を示し、その特性について明かにした¹⁾。本研究では、これまでの研究をさらに発展させ、たわみと面内変位が練成したカップリング剛性の影響が含まれる非対称積層長方形板の動的安定性の解法を示すとともに、動的不安定領域におよぼす異方性の影響、積層数、配向角および板厚比の影響を検討し、動的不安定領域を明らかにするものである。

2. 解析方法 せん断変形とカップリング剛性を考慮した積層板のひずみエネルギー V および運動エネルギー T は本講演集²⁾に記されているが、 x 軸方向に一樣分布の静的面内力 N_{x0} と変動面内力 $N_{xt} \cos \Omega t$ が作用する場合の面内力がなす仕事 $U(w)$ は、次のように書き改められる。

$$U(w) = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \iint_A (N_{x0} + N_{xt} \cos \Omega t) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dAdz \quad (1)$$

ここに、 h : 積層板の板厚、 N_{x0} : 静的面内力、 N_{xt} : 変動面内力の振幅、 t : 時間、 Ω : 変動面内力の円振動数、 w : たわみ、 u, v : 面内変位、 $\bar{\alpha}$: x 軸方向の回転角、 $\bar{\beta}$: y 軸方向の回転角

次に、積層板のたわみ、面内変位および回転角を次式のように仮定する³⁾。

$$\begin{aligned} w(\xi, \zeta, t) &= \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{mn}(t) \bar{W}_{mn}(\xi, \zeta), u_0(\xi, \zeta, t) = \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{mn}(t) \bar{U}_{mn}(\xi, \zeta), v_0(\xi, \zeta, t) = \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{mn}(t) \bar{V}_{mn}(\xi, \zeta) \\ \bar{\alpha}(\xi, \zeta, t) &= \frac{1}{h^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{mn}(t) \bar{A}_{mn}(\xi, \zeta), \bar{\beta}(\xi, \zeta, t) = \frac{1}{h^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{mn}(t) \bar{B}_{mn}(\xi, \zeta) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $\bar{T}_{mn}$: 時間に関する未知の関数、 $\bar{W}_{mn}(\xi, \zeta)$, $\bar{U}_{mn}(\xi, \zeta)$, $\bar{V}_{mn}(\xi, \zeta)$, $\bar{A}_{mn}(\xi, \zeta)$, $\bar{B}_{mn}(\xi, \zeta)$: 幾何学的境界条件を満足する座標関数で、固有振動解析で得られた固有振動形を用いる、 $\xi = x/a$, $\zeta = y/b$

ここで、運動方程式を誘導するために、Hamiltonの原理を適用する。すなわち、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \{T - (V - U)\} dt = 0 \quad \text{ここに、} t = t_1, t_2 \text{ で } \delta w(\xi, \zeta, t_1) = \delta w(\xi, \zeta, t_2) = 0 \quad (3)$$

$$\text{式(3)の変分を行ない、まとめると、} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \bar{A}_{nm}^{kl} \bar{T}_{nm} + \left(\frac{1}{\lambda_{v1}^0} \bar{B}_{nm}^{kl} - \frac{\lambda_{b0}^0}{\lambda_{v1}^0} (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{xt} \cos \Omega t) \bar{C}_{nm}^{kl} \right) \bar{T}_{nm} \right\} = 0 \quad (4)$$

$$\text{ここに、} \bar{A}_{nm}^{kl} = \int_0^1 \int_0^1 \{ \bar{U}_{mn} \bar{U}_{kl} + \bar{V}_{mn} \bar{V}_{kl} + \bar{W}_{mn} \bar{W}_{kl} \} d\xi d\zeta, \quad \bar{C}_{nm}^{kl} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\beta^2} \bar{W}_{mn, \xi} \bar{W}_{kl, \xi} d\xi d\zeta$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_{nm}^{kl} &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{A_{11}}{\beta^2} \bar{U}_{mn, \xi} \bar{U}_{kl, \xi} + \frac{D_{11}}{\beta^2} \bar{A}_{mn, \xi} \bar{A}_{kl, \xi} + \frac{A_{12}}{\beta} (\bar{U}_{mn, \xi} \bar{V}_{kl, \xi} + \bar{V}_{mn, \xi} \bar{U}_{kl, \xi}) + \frac{D_{12}}{\beta} (\bar{B}_{mn, \xi} \bar{A}_{kl, \xi} + \bar{A}_{mn, \xi} \bar{B}_{kl, \xi}) + D_{22} \bar{B}_{mn, \xi} \bar{B}_{kl, \xi} \right. \\ &+ A_{22} \bar{V}_{mn, \xi} \bar{V}_{kl, \xi} + \frac{D_{16}}{\beta^2} (2 \bar{A}_{mn, \xi} \bar{A}_{kl, \xi} + \bar{A}_{mn, \xi} \bar{B}_{kl, \xi} + \bar{B}_{mn, \xi} \bar{A}_{kl, \xi}) + D_{66} \left(\bar{A}_{mn, \xi} \bar{A}_{kl, \xi} + \frac{1}{\beta} (\bar{A}_{mn, \xi} \bar{B}_{kl, \xi} + \bar{B}_{mn, \xi} \bar{A}_{kl, \xi}) + \frac{1}{\beta^2} \bar{B}_{mn, \xi} \bar{B}_{kl, \xi} \right) \\ &+ \frac{B_{16}}{\beta^2} (\bar{U}_{mn, \xi} \bar{B}_{kl, \xi} + \bar{B}_{mn, \xi} \bar{U}_{kl, \xi} + \bar{V}_{mn, \xi} \bar{A}_{kl, \xi} + \bar{A}_{mn, \xi} \bar{V}_{kl, \xi}) + \frac{B_{16}}{\beta} (\bar{U}_{mn, \xi} \bar{A}_{kl, \xi} + \bar{A}_{mn, \xi} \bar{U}_{kl, \xi} + \bar{U}_{mn, \xi} \bar{A}_{kl, \xi} \pm \bar{A}_{mn, \xi} \bar{U}_{kl, \xi}) \\ &+ B_{26} (\bar{V}_{mn, \xi} \bar{A}_{kl, \xi} + \bar{A}_{mn, \xi} \bar{V}_{kl, \xi} + \bar{U}_{mn, \xi} \bar{B}_{kl, \xi} + \bar{B}_{mn, \xi} \bar{U}_{kl, \xi}) + \frac{B_{26}}{\beta} (\bar{V}_{mn, \xi} \bar{B}_{kl, \xi} + \bar{B}_{mn, \xi} \bar{V}_{kl, \xi} + \bar{V}_{mn, \xi} \bar{B}_{kl, \xi} + \bar{B}_{mn, \xi} \bar{V}_{kl, \xi}) \\ &+ k A_{55} \left(\bar{A}_{mn} \bar{A}_{kl} + \frac{1}{\beta} (\bar{A}_{mn} \bar{W}_{kl, \xi} + \bar{W}_{mn, \xi} \bar{A}_{kl}) + \frac{1}{\beta^2} \bar{W}_{mn, \xi} \bar{W}_{kl, \xi} \right) + A_{66} \left(\bar{U}_{mn, \xi} \bar{U}_{kl, \xi} + \frac{1}{\beta} (\bar{U}_{mn, \xi} \bar{V}_{kl, \xi} + \bar{V}_{mn, \xi} \bar{U}_{kl, \xi}) + \frac{1}{\beta^2} \bar{V}_{mn, \xi} \bar{V}_{kl, \xi} \right) \\ &+ k A_{44} (\bar{B}_{mn} \bar{B}_{kl} + \bar{B}_{mn} \bar{W}_{kl, \xi} + \bar{W}_{mn, \xi} \bar{B}_{kl} + \bar{W}_{mn, \xi} \bar{W}_{kl, \xi}) \Big) d\xi d\zeta. \quad \text{上式において、} \end{aligned}$$

$\bar{W}_{mn, \xi}, \bar{W}_{mn, \zeta}, \bar{U}_{mn, \xi}, \bar{U}_{mn, \zeta}, \bar{V}_{mn, \xi}, \bar{V}_{mn, \zeta}, \bar{A}_{mn, \xi}, \bar{A}_{mn, \zeta}, \bar{B}_{mn, \xi}, \bar{B}_{mn, \zeta}$: $\bar{W}_{mn}, \bar{U}_{mn}, \bar{V}_{mn}, \bar{A}_{mn}, \bar{B}_{mn}$ の微分からなる関数。

$\bar{W}_{kl,\xi}, \bar{W}_{kl,\xi}, \bar{U}_{kl,\xi}, \bar{U}_{kl,\xi}, \bar{V}_{kl,\xi}, \bar{V}_{kl,\xi}, \bar{A}_{kl,\xi}, \bar{A}_{kl,\xi}, \bar{B}_{kl,\xi}, \bar{B}_{kl,\xi}$: $\bar{W}_{kl}, \bar{U}_{kl}, \bar{V}_{kl}, \bar{A}_{kl}, \bar{B}_{kl}$ の微分からなる関数。

また、 $\tau = \omega_{11}^0 t$, $\bar{\omega} = \Omega / \omega_{11}^0$, $\bar{N}_{x0} = N_{x0} / N_{cr}$, $\bar{N}_{xt} = N_{xt} / N_{cr}$, $\lambda_{v1}^0 = \rho h b^4 \omega_{11}^0{}^2 / D_{11}^0$, $\lambda_b^0 = N_{cr} b^2 / D_{11}^0$
 ω_{11}^0 : $\theta = 0^\circ$ の 1 次の固有円振動数、 N_{cr} : 座屈面内力、 D_{11}^0 : $\theta = 0^\circ$ の D_{11} の板剛度。

式(4)を行列表示すると次式が得られる。

$$[A] \left\{ \ddot{\bar{T}} \right\} + [B] \left\{ \dot{\bar{T}} \right\} + (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{xt} \cos \bar{\omega} \tau) [C] \left\{ \bar{T} \right\} = \{0\} \quad (5)$$

$$\left\{ \bar{T} \right\} = [\bar{T}_{11}, \bar{T}_{12}, \dots, \bar{T}_{1L}, \bar{T}_{21}, \bar{T}_{22}, \dots, \bar{T}_{2L}, \dots, \bar{T}_{LL}]^T, [A]: A\{j+(i-1)L, n+(m-1)L\} = \bar{A}_{mn}^{kl} \quad (i, j, m, n=1, \dots, L)$$

$$[B]: B\{j+(i-1)L, n+(m-1)L\} = 1/\lambda_{v1}^0 \bar{B}_{mn}^{kl}, [C]: C\{j+(i-1)L, n+(m-1)L\} = -\lambda_b^0/\lambda_{v1}^0 \bar{C}_{mn}^{kl}$$

式(5)の一般解を指数関数とフーリエ級数の積で仮定し、調和バランス法により 2 倍サイズの固有値問題に変換して系の安定判別を行う⁴⁾。

3. 数値結果 図-1 は異方性が高い材料 GRAPHITE/EP を用いた、板厚比 $a/h=10$ の 2 層からなる全周辺が曲げに対して単純支持、面内変位に対して固定された正方形板の配向角 $\theta = 30^\circ$ の変動面内力 $\bar{N}_{xt}$ を変化させた場合の動的不安定領域の変動を示す。縦軸 $\bar{N}_{xt}$ は無次元変動面内力、横軸 $\bar{\omega}$ は無次元動振振動数である。図中では、無次元変動面内力の振幅 $\bar{N}_{xt}$ が 0.5 のときの不安定領域の幅が 0.1 未満の領域は無視しており、上部に記してある ω_{ij} の i, j の値はそれぞれ x 軸方向、 y 軸方向の半波数を表している。面外全周辺単純支持非対称積層板は、主不安定領域のみ発生し、対称積層の場合に発生した結合共振による動的不安定領域は発生しない。これは、非対称配置では曲げ-ねじりカップリング剛性が零となるためである。

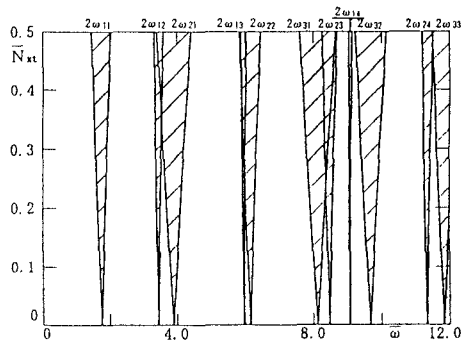
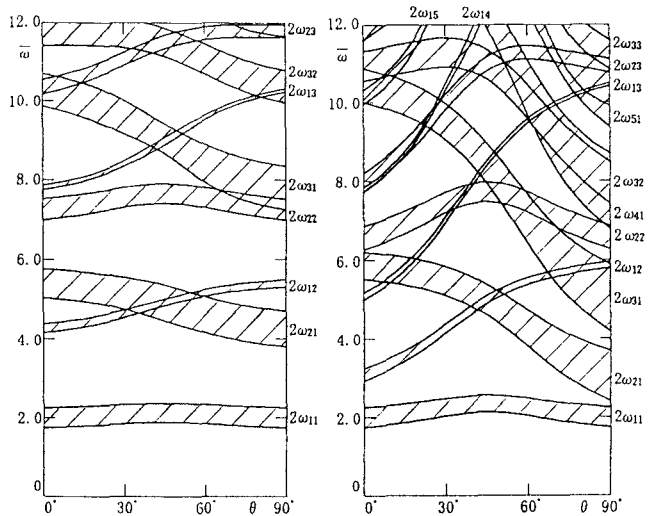


図-1 動的不安定領域 ($L=2, a/h=10$)

次に、図-2 (a), (b) に板厚比 $a/h=10$ の 4 層からなる面外全周辺単純支持正方形板の配向角の変化による動的不安定領域の変動を異方性の異なる 2 種類の材料 ((a) EGLASS/EP, (b) GRAPHITE/EP) について示す。縦軸 $\bar{\omega}$ は無次元動振振動数、横軸 θ は配向角である。変動面内力の振幅は、配向角 $\theta = 0^\circ$ における $\bar{N}_{xt} = 0.5$ の値を用いる。配向角の変化により動的不安定領域は変動し、 x 軸方向の半波数 i が y 軸方向の半波数 j よりも大きい不安定領域は配向角の増加とともに低い振動数領域で発生し、動的不安定領域の幅は広くなる。この影響は、(b) に示す異方性の大きな材料で顕著である。



(a) EGLASS/EP (b) GRAPHITE/EP

図-2 不安定領域の変動 ($L=2, a/h=10$)

4. まとめ 配向角の変化により動的不安定領域は変動する。この変動は、 x 軸方向と y 軸方向の半波数が異なる不安定領域において顕著である。積層数および板厚比の影響については講演時に発表する。

参考文献

- (1) 高橋・江島・佐藤・瀬戸: 対称アングルプライ積層長方形板の動的安定性, 構造工学論文集, Vol. 41A (掲載予定)。
- (2) 前田・高橋・佐藤: 非対称積層長方形板の振動および座屈特性, 土木学会西部支部講演概要集, 1995. 3。
- (3) J. -L. DOONG AND C. -P. FUNG: Journal of Sound and Vibration, Vol. 125(2), pp. 325-339, 1988。
- (4) Takahashi, K.: Journal of Sound and Vibration, Vol. 85, pp. 257-262, 1982。