

長方形板の振動および座屈挙動に及ぼす温度変化の影響

長崎大学工学部 学生員 ○藤野昭二

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

1. まえがき 長方形板が温度変化を受けると熱応力が発生し、熱座屈や固有振動特性に変化を及ぼす。砂川¹⁾が、温度変化を受ける長方形平板の有限変形を考慮した運動方程式に Galerkin 法を適用して 1 自由度系の非線形運動方程式を導き出し、これに摂動法を用いて解析している。著者らはこれを多自由度系に拡張して非線形の大きさに制限がない調和とバランス法を用いた解析を計画している。本報告では、その一段階として 1 自由度系としての解を求め、既往の解と比較する。

2. 解法 図-1 に示すような急激な温度変化を受けた長方形平板の運動方程式¹⁾は、次のようになる。

$$D\nabla^4 w = d \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{Ed^2 \alpha}{(1-\nu)} \nabla^2 \bar{\theta} - \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

また、適合条件式は次式となる。

$$\nabla^4 \chi = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - E \alpha \nabla^2 \bar{\theta} \quad (2)$$

ここに、 d : 板厚、 x, y : 直交座標系、 t : 時間、 w : 中立面の z 方向の変位、 $D = Ed^3/12(1-\nu^2)$: 平板の曲げ剛性、 E : 板材料の縦弾性係数、 α : 板材料の線膨張係数、 ρ : 板材料の密度、 $\bar{\theta}$: 平均温度、 $\tilde{\theta}$: 温度モーメント、 ν : ポアソン比、 χ : Airy の応力関数、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 、 $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$

板の境界条件は、曲げに対して四辺単純支持あるいは四辺固定とし、面内変位 u, v は固定とする。式(1)の単純支持の場合の解を 1 自由度系で次のように仮定する。

$$w(x, y, 0, t) = z(\theta, t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (3)$$

ここに、 $z(\theta, t)$: 平板中央の変位

$z(\theta, t)$ は温度変化による平板中央の無次元変位 $\bar{z}(t)$ と温度変化のみによる平板中央の無次元変位 $z_0(\theta)$ に分けられる。

$$z(\theta, t)/d = z_0(\theta) + \bar{z}(t)_{\theta=0} \quad (4)$$

応力関数は、次式のように仮定することができる。

$$\chi = \frac{1}{2} C_1 x^2 + \frac{1}{2} C_2 y^2 + I \quad (5)$$

ここに、 C_1, C_2, I : 積分定数

板面内の温度分布は中央に関して対称形を仮定して、次式で与える。

$$\bar{\theta} = \sum_i \sum_j \bar{\theta}_{ij} \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \quad (i, j = 0, 2, 4, \dots, \text{even}) \quad (6)$$

$$\tilde{\theta} = \sum_p \sum_q \tilde{\theta}_{pq} \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \quad (p, q = 1, 3, 5, \dots, \text{odd}) \quad (7)$$

式(1)の近似解を求めるために Galerkin 法を適用し、 x, y 座標、時間 t に関して無次元化を行うと次の非線形単微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 \bar{z}(\tau)}{d\tau^2} + \left(F_1 + 3F_3 z_0(\theta)^2 \right) \bar{z}(\tau) + 3F_3 z_0(\theta) \bar{z}(\tau)^2 + F_3 \bar{z}(\tau)^3 = 0 \quad (8)$$

ここに、 τ : 無次元時間、 F_1, F_3 : 係数

$z_0(\theta)$ は静的解であり、次式の解として得られる。

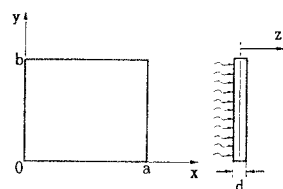


図-1 長方形平板

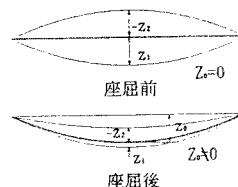


図-2 最大と最小振幅の取り方

$$F_1 z_0(\theta) + F_3 z_0(\theta)^3 = g \quad (9)$$

式(8)は非線形自由振動方程式なので解を次式のように仮定する。

$$\bar{z}(\tau) = a_0 + a_1 \cos \omega \tau \quad (10)$$

ここに、 ω ：非線形振動数、 a_0, a_1 ：係数

式(9)を式(7)に代入して調和バランス法を適用すれば、未定定数を求める連立非線形代数方程式が得られる。

$$a_0 \left(F_1 + 3F_3 z_0^2 \right) + 3F_3 z_0 \left(a_0^2 + \frac{a_1^2}{2} \right) + F_3 \left(a_0^3 + \frac{3}{2} a_0 a_1^2 \right) = 0 \quad (11)$$

$$a_1 \left(F_1 + 3F_3 z_0^2 \right) + 6F_3 z_0 a_0 a_1 + F_3 \left(\frac{3}{4} a_1^3 + 3a_0^2 a_1 \right) - a_1 \omega^2 = 0 \quad (12)$$

ここで、式(11),(12)を Newton-Raphson 法を用いて、適当な初期値のもとに解けば解が得られる。

3. 解析結果 長方形平板は次式で与えられる温度変化を受けるものとする

$$\theta = \bar{\theta} = \Theta \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \bar{\theta} = 0 \quad (13)$$

ここに、 θ ：無歪み無応力状態よりの温度上昇

長方形平板は、臨界温度 Θ_{cr} において熱座屈を起こすので、座屈を起こす前後に分けて考える。臨界温度 Θ_{cr} と座屈後の平板中央のたわみ $z_0(\theta)$ の関係は式(9)より求めることによって得られる。縦軸 $(b/d)^2 \alpha \theta$ は、無次元温度であり横軸 z_0 は温度変化による平板中央の無次元変位である。図-4 は、臨界温度 Θ_{cr} とアスペクト比 λ の関係の変化を示してある。図-3 から温度変化によって平板は座屈したたわみを生ずるが、図-4 に示すように熱座屈後は λ が大きくなると一定となる。図-5 は、正方形平板 ($\lambda=1$) の非線形振動数と振幅の関係を温度をパラメーターに示す。縦軸 $\omega/\omega_{0=0}$ は、 $\theta=0$ の時の振動数無次元化した無次元振動数で、横軸 a_1 は振幅である。図には、Newton-Raphson 法によ

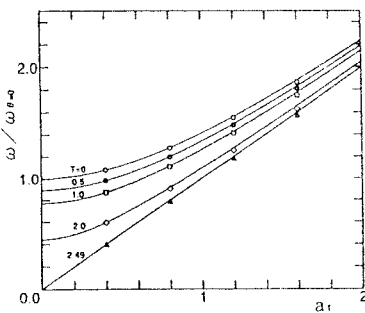


図-5 振動数に及ぼす振幅の影響(座屈前)

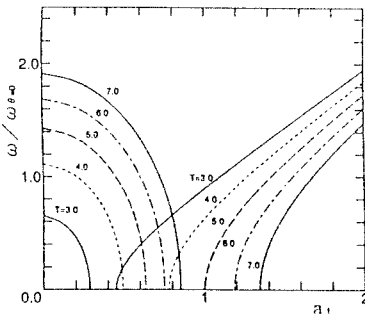


図-6 振動数に及ぼす振幅の影響(座屈後)

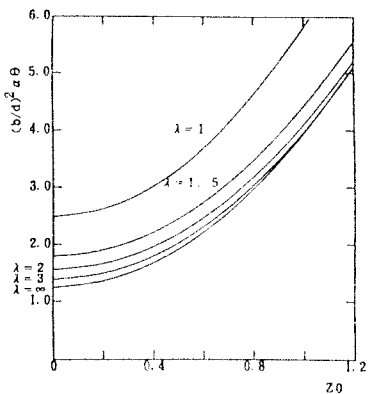


図-3 平板中央の温度とたわみの関係

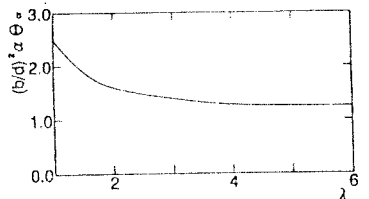


図-4 熱座屈係数の aspect 比による変化

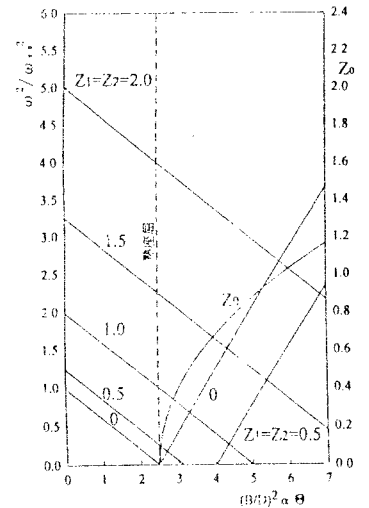


図-7 平板の振動数の温度変化および振幅

による変化 ($\lambda=1$)

によって得られた解と Runge-Kutta-Gill 法によって得られた解とを比較してある。両者はほぼ一致することが確かめられる。また、文献 1) の結果ともよく一致している。図-5 は、座屈後の振動数と振幅の関係を示している。座屈前には $z_0 = 0$ となるが座屈後では値を持ち図中のような 2 つの解がでてくる。図-7 は、図-5, 6 を用いて振動数と温度との関係を振幅をパラメーターとして示している。この図から熱座屈後でも、温度が上昇するにしたがって振動数も増大することがわかる。

4. まとめ 本研究では、熱座屈前後の平板の自由振動特性に与える温度の影響を明らかにした。固定の場合については講演時に発表する。

参考文献

1) 砂川 恵：日本機械学会論文集、第 1 部、第 30 巻、第 212 号、pp.558~566、1965