

非対称積層長方形板の振動および座屈特性

長崎大学工学部 学生員 ○前田悟雄 長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

長崎大学工学部 学生員 佐藤栄司

1. まえがき 複合材料は、異なった性質の材料を組み合わせたり、配向角を変えることによって利用目的にあった材料を得ることができる。著者らにはこれまでに、解の仮定が容易なRayleigh-Ritz法を用い、せん断変形を無視した中央面对称積層長方形板の振動特性、座屈特性及び動的安定特性について明かにした。そこで、本研究では、これまでの研究を拡張し、たわみと面内変位の連性項が含まれるせん断変形を考慮した非対称積層長方形板の振動特性及び座屈特性について解析する。

2. ひずみエネルギーおよび解法 図-1に示すような積層長方形板に対してx方向に一様分布の静的面内力 N_x が作用する場合を考える。面外せん断変形を考慮した非対称積層長方形板の曲げ変形に伴うエネルギーは、次式のように与えられる²⁾。

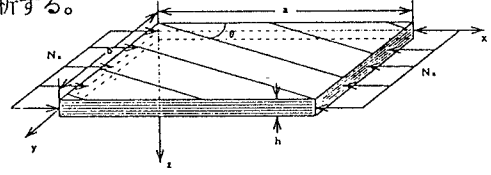


図-1 一般図

$$\begin{aligned}
 V = \iint_A \left\{ \frac{A_{11}}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{D_{11}}{2} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} \right)^2 + A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + D_{12} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} + \frac{A_{22}}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{D_{22}}{2} \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} \right)^2 \right. \\
 + B_{16} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} \right] + B_{26} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} \right] \\
 + \frac{1}{2} k A_{44} \left[\bar{\beta}^2 + 2 \bar{\beta} \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + k A_{45} \left[\bar{\alpha} \bar{\beta} + \bar{\alpha} \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{\beta} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} k A_{55} \left[\bar{\alpha}^2 + 2 \bar{\alpha} \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 \left. + A_{66} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right] + D_{66} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dA \quad (1)
 \end{aligned}$$

ここに、 A_{ij} :面内剛性、 B_{ij} :カップリング剛性、 D_{ij} :曲げ剛性、 k :せん断補正係数

x, y :平板中央面の座標系、 w, u_0, v_0 :平板中央面の変位、 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$: x, y 方向の回転角

次に、運動エネルギーおよびx軸方向の面内力がなす仕事は次のように与えられる。

$$T(u_0, v_0, w) = \frac{1}{2} \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \iint_A \left\{ \left(\frac{\partial(u_0 + z\bar{\alpha})}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial(v_0 + z\bar{\beta})}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dA dz, \quad N(w) = \frac{1}{2} \iint_A N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dA \quad (2)$$

ここに、 ρ :板の密度、 h :板厚

曲げに対して全周辺単純支持、法線方向の面内変位が固定された板の変位及び x, y 方向の回転角を次式のよ

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \zeta, t) &= \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \exp(i\omega_{mn}t) \sin m\pi\xi \sin n\pi\zeta, & u_0(\xi, \zeta, t) &= \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \exp(i\omega_{mn}t) \sin m\pi\xi \cos n\pi\zeta \\
 v_0(\xi, \zeta, t) &= \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \exp(i\omega_{mn}t) \cos m\pi\xi \sin n\pi\zeta, & \bar{\alpha}(\xi, \zeta, t) &= \frac{1}{h^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \exp(i\omega_{mn}t) \cos m\pi\xi \sin n\pi\zeta \\
 \bar{\beta}(\xi, \zeta, t) &= \frac{1}{h^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_{mn} \exp(i\omega_{mn}t) \sin m\pi\xi \cos n\pi\zeta \quad (3)
 \end{aligned}$$

ここに、 $W_{mn}, U_{mn}, V_{mn}, \bar{A}_{mn}, \bar{B}_{mn}$:未定定数、 ω_{mn} :固有円振動数、 $\xi = x/a, \zeta = y/b$

$$\text{Rayleigh-Ritz法を適用すると} \quad \frac{\partial}{\partial A_{rs}} (V - T - N) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, L, \quad s = 1, 2, \dots, L) \quad (4)$$

式(4)に式(1)、(2)を代入して、 $\beta = a/b$ (縦横比)、 $\gamma = a/h$ (板厚比)、 $A_{11}^* = h^2 A_{11}/D_{11}^0, A_{12}^* = h^2 A_{12}/D_{11}^0, A_{22}^* = h^2 A_{22}/D_{11}^0, A_{66}^* = h^2 A_{66}/D_{11}^0, B_{16}^* = h B_{16}/D_{11}^0, B_{26}^* = h B_{26}/D_{11}^0, D_{11}^* = D_{11}/D_{11}^0, D_{12}^* = D_{12}/D_{11}^0,$

$D_{22}^* = D_{22}/D_{11}^0, D_{66}^* = D_{66}/D_{11}^0$ ($D_{11}^0: \theta = 0^\circ$ の場合の D_{11} の板剛性) とする無次元化を行ない、積分してまとめると、次のように行列表示される。

$$([E] - \lambda^4 [F] - \lambda_{cr} [G]) \{A\} = \{0\} \quad (5)$$

ここに、 $[E]: E(s + (r-1)L, n + (m-1)L) = E_{mrns}, [F]: F(s + (r-1)L, n + (m-1)L) = F_{mrns}$

$$[G]: G(s + (r-1)L, n + (m-1)L) = G_{mrns}, \{A\}: \{A_{11}A_{12} \cdots A_{1L}A_{21}A_{22} \cdots A_{LL}\}^T$$

$$\lambda^4 = \rho \omega_{mn}^2 \frac{b^4}{h D_{11}^0 \pi^2}, \quad \lambda_b = N_x \frac{b^2}{D_{11}^0 \pi^2 \beta^2}$$

式(5)で $\lambda_b = 0$ とおけば、自由振動の固有値 λ が、 $\lambda = 0$ とおけば座屈固有値 λ_b が行列の固有値問題として得ることができる。

3. 数値結果 (1)固有振動特性 図-2に材料GRAPHITE/EPを用いた板厚比 $\gamma = 10$ の4層積層正方形板($\beta = 1.0$)の固有振動曲線を示す。なお補正係数は、 $k=5/6$ を用いる。縦軸 ω^* は等方性板の一次の固有振動数で無次元化した無次元固有振動数、横軸 θ はラミナの配向角である。これより、 $\theta = 45^\circ$ に関して固有振動数が対称、もしくは逆対称になる。また、高次振動になるにつれて、固有振動数の変動が顕著になる。図-3に、同じ積層板の 0° 及び 45° の場合の固有振動数と板厚比の関係を示す。縦軸 ω^* は固有振動数、横軸 γ は板厚比である。これより、 $\gamma = 10$ 前後あたりから固有振動数は一定となる。また、高次振動の方が板厚比の変化による振動数の変動が大きい。

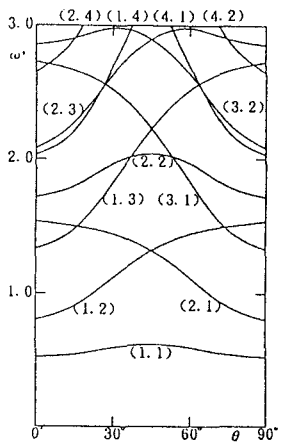


図-2 固有振動曲線 (GRAPHITE/EP4層, $\gamma=10$)

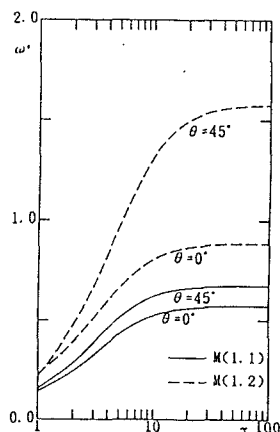


図-3 固有振動数と板厚比 (GRAPHITE/EP4層)

(2)座屈特性 図-4, 5にGRAPHITE/EPを用いた板厚比 $\gamma = 10$ および $\gamma = 50$ の場合の4層積層長方形板の座屈曲線を示す。縦軸 λ_b は座屈固有値、横軸 β は縦横比である。 $\gamma = 10$ の厚板の場合、カップリングの影響が小さくなるので、薄板と比べてラミナの配向角が座屈固有値に及ぼす影響が小さくなる。また、 β が増加するにともない配向角の影響が小さくなる。ここでは示していないが、材料EGLASS/EPと比較すると、異方性の大きいGRAPHITE/EPの方が配向角の影響が大きく、 β の変化による座屈固有値の変動が小さい。

4. まとめ カップリングの影響が大きくなると、配向角が振動・座屈特性に及ぼす影響は大きい。カップリングの影響は異方性の大きい材料及び薄板の方が顕著にあらわれる。なお、積層数の影響については講演時に発表する。

参考文献

- 1) 高橋・江島・佐藤・瀬戸: 対称アングルプライ積層長方形板の動的安定性. 構造工学論文集. Vol. 41A掲載予定.
- 2) 福田・野村・武田: 複合材料の構造力学, 日刊工業新聞社. pp. 159-166, 1987.

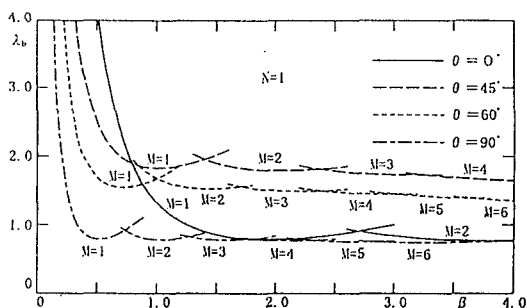


図-4 座屈曲線 (GRAPHITE/EP 4層 $\gamma=50$)

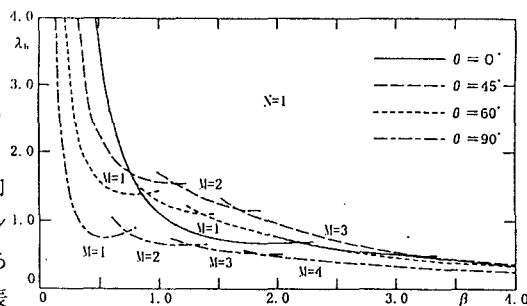


図-5 座屈曲線 (GRAPHITE/EP 4層 $\gamma=10$)